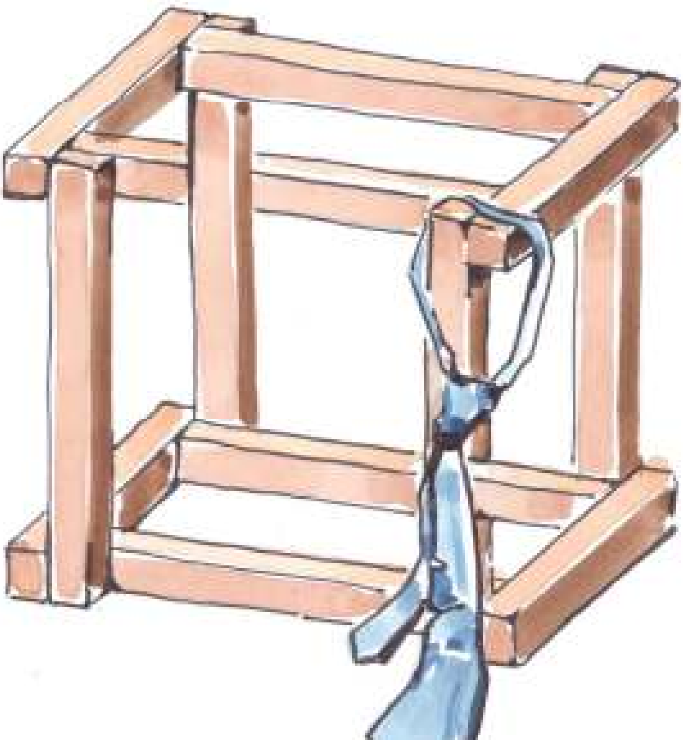
Guillermo Verger

representación gráfica sin corbata



ADFI

Coad

Guillermo Verger

Representación gráfica sin corbata

Primer Premio del Concurso ADFI
de publicación de libros 2014

ADFI

Coad
Asociación Gremial de Docentes
e Investigadores de la UNR

Verger, Guillermo
Representación gráfica sin corbata. - 1a ed. - Rosario : Asociación de Docentes e Investigadores de la UNR - COAD, 2014.
164 p. : il. ; 21x15 cm.

ISBN 978-987-45666-1-4

1. Geometría. 2. Resolución de Problemas. I. Título
CDD 512

Fecha de catalogación: 29/10/2014

ISBN 978-987-45666-1-4

Diseño de tapa y compaginación: Guillermo Verger y Adriana Foss

Este libro ha sido premiado en el Concurso de Publicación de Libros ADFI 2014. Dicho concurso fue convocado por la ADFI, comisión interna de COAD en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la UNR, integrada por María Cristina Sanziel, Beatriz Introcaso, Raul Postiglione, Federico Miyara, Leonardo Rico, Ignacio Hamad, Isolda Cardoso, Luciano Ponzellini Marinelli, Alejandro Mezio, Cintia Sposetti, Carlos Scuderi, Noemi Ferreri y Leandro Pala.

Integraron el Jurado la Dra. Gabriela Ovando, la Lic. Marina Larrosa, la Prof. Ana Laura Buono, el Ing. Hugo Buttigliero y el Ing. Federico Miyara, contando con el asesoramiento externo de la Dra. Marta Massa.

IMPRESO EN LA ARGENTINA / PRINTED IN ARGENTINA
Asociación Gremial de Docentes e Investigadores de la UNR - COAD
Tucumán 2254 - 2000 Rosario / www.coad.org.ar

Agradecimientos

En primer lugar a mis padres que ya no están. Me inculcaron el valor del estudio, el esfuerzo y la responsabilidad para ser una persona útil a la sociedad y merecedor de sus retribuciones.

A quienes fueron mis profesores primero y luego compañeros de trabajo. Arq. Carlos Schmidt, Ing. Miguel Werber, Agr. Oscar Gervasoni e Ing. Roberto López. Invirtieron tiempo en mi formación y me abrieron las puertas al mundo del dibujo y la docencia.

A mis compañeros de trabajo de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario y de la Facultad Regional Rosario de la Universidad Tecnológica Nacional por el fructífero y enriquecedor intercambio que realizamos diariamente.

A Gastón St.Jean y Federico Miyara por su generosa colaboración en la revisión del original.

A mis amigos de Mensa en Rosario por afrontar estoicamente los problemas de ingenio que habitualmente les planteo, lo que me ha permitido elaborar algunos de los que se muestran en el libro.

A mi compañera de vida porque me acompaña y entiende los tiempos que demanda preparar un libro a quien no es un escritor profesional.

Prólogo

Los objetos tienen formas explicables geométricamente. Cuando se trata de objetos simples, esas formas las podemos describir verbalmente. Pero cuando los objetos son más complejos y elaborados, la explicación verbal de sus formas se complica progresivamente hasta tornarse incompleta e inadecuada. La solución adoptada por la técnica es hacerlo mediante gráficos que describan la forma con total precisión.

El libro intenta acercar al lector los conceptos básicos sobre los que se asienta la representación gráfica, estimulando su comprensión y dominio mediante la propuesta de desafíos recreativos en los que esos saberes son de esencial utilidad. La representación gráfica es para hacer, que es bastante más que simplemente leer o entender. Por esto es que se trata de trabajar sobre problemas que nos lleven a pensar y realizar una práctica significativa. En este sentido, la disciplina tiene mucho en común con la música, la danza y el deporte. Hay habilidades a aprender y actividades que realizar si se desea ser bueno en eso. El tratamiento que se da a los problemas planteados es proponer al lector que busque la solución por sí mismo; a continuación se dan pautas para resolver y finalmente se desarrolla la solución con la expectativa que sirva de modelo.

Si bien se presentan conceptos básicos de la representación gráfica, debemos aclarar que este no es un libro de texto. Se tratan temas vinculados a las representaciones planas, el cálculo gráfico, la representación de objetos tridimensionales, para luego seguir con temas que siempre resultaron fuente inagotable de problemas; me refiero a poliedros, desarrollos y perspectivas. El desarrollo de estos temas comprobaremos que la representación gráfica es más que confección de planos, es también una potente herramienta de cálculo. Finalmente se presenta algún caso curioso en el que habrá que discernir si se trata de un objeto posible y, ya en el límite de lo que es la representación gráfica, se plantea un problema de lógica sobre un gráfico.

La idea fuerza es que el lector descubra que esta disciplina puede resultar, no solamente de suma utilidad para el desempeño profesional, sino también de fácil acceso y recreativa.

¿Por qué sin corbata?

Algunos se preguntarán el por qué del título. Tiene que ver con la idea fuerza que lleva. La mejor forma de describirla, en forma muy sintética, es mediante una analogía con la forma de vestir. Es algo informal.

Porque no seguiremos caminos rígidos preestablecidos para mostrar una disciplina.

Porque buscamos opciones creativas de utilizar los conceptos.

Porque planteamos situaciones que llevan a pensar, buscar un camino, analizar el proceso.

Porque tal vez sea un andar más agitado, no muy confortable, pero más atractivo y atrapante que nos llevará a comprender mejor las ideas para finalmente alcanzar el 'saber hacer'.

Porque en ocasiones no hay un camino hecho previamente y tenemos que construirlo para alcanzar la solución buscada.

Porque si tendremos que andar fuera de la ruta será mejor que lo hagamos sin corbata.

Para cerrar el ciclo

Si usted tiene comentarios, críticas, observaciones o soluciones alternativas a los problemas, envíelos a mi dirección de correo electrónico: gverger@fceia.unr.edu.ar

Contenido

Capítulo 1
Representación gráfica y problemas

¿Qué es la representación gráfica?

En muchas profesiones trabajamos con objetos de tres dimensiones sobre los que debemos operar en las diferentes etapas de su ciclo de vida, sea proponiendo su forma y tamaño, pasando por las modificaciones, correcciones y mantenimiento necesarios hasta su disposición una vez alcanzado el fin del ciclo. Ese operar sobre los objetos implica, entre otros, especificarlos y documentarlos para comprender y comunicar diseños.

Los objetos tienen formas tridimensionales explicables mediante la geometría de sólidos. Sin embargo sería bastante complicado tratar de describir su forma verbalmente mediante la combinación de las formas geométricas que los componen, sus medidas y relaciones. La solución adoptada por la técnica es hacerlo mediante gráficos que posibilitan realizar esa descripción con total precisión.

La representación gráfica es la disciplina que, con fundamentos geométricos, permite realizar la comunicación de formas mediante trazados planos para representar objetos planos y tridimensionales.

Los objetos planos, formas geométricas y curvas se trazan en un plano con las mismas medidas que tiene en la realidad el objeto representado o, si las medidas del objeto no son adecuadas para trasladarlas a nuestro plano, se utilizará una escala. Esto es, representar el objeto con una imagen de medidas proporcionales a las del objeto real.

Los objetos tridimensionales se representan mediante alguno de los sistemas desarrollados con esa finalidad: sistema diédrico multiplanar, sistema de proyecciones acotadas, sistema axonométrico en alguna de sus variantes o sistema de proyección central también conocido como perspectiva real. Estos sistemas de representación se valen a su vez de las técnicas desarrolladas para las representaciones bidimensionales.

Resolución de Problemas

Como en todas las disciplinas, lo que cuenta no es lo que se aprende sino lo que podemos hacer con lo que aprendemos. Dicho en otras palabras, 'tener el conocimiento y saber usarlo'. Y una de las formas más efectivas de consolidar conocimientos y comenzar a hacer es la resolución de problemas, competencia ésta de altísima importancia en todas las profesiones, particularmente las de naturaleza técnica.

Para resolver un problema es necesario en primer lugar comprenderlo, tanto en lo conceptual como en lo procedimental. Esto es conocer el tema que se trata y entender qué se quiere conseguir, o sea el objetivo.

Siguiendo esa lógica se presentan conceptos que luego serán necesarios para resolver los problemas planteados.

Sin llegar a los conceptos más elaborados, y eventualmente más complicados, tratamos de realizar un recorrido por los diferentes aspectos vinculados a la representación gráfica de forma que el lector pueda tener un panorama de la disciplina.

Tratamiento de los problemas

Resolver problemas y perfeccionar la forma de hacerlo exige el desarrollo de habilidades específicas.

Analizar resoluciones correctas sirve para aprender. También sirve, y mucho, contrastar soluciones propias con esas correctas. Por eso la propuesta consiste en *plantear los problemas, dar pautas para encaminarse en la resolución y recién después presentar la solución*.

Problemas Recreativos

Se dice que somos exitosos, en la medida que nos atrevamos a conquistar nuevos retos. El desafío genera motivación, nos permite mantenernos enfocados en metas y nos brinda la posibilidad de crecer y expandir nuestras habilidades y capacidades.

Un desafío es un reto o empresa difícil a la que hay que enfrentarse. Plantear y resolver desafíos es una tendencia innata a cualquier hombre, mujer o niño inteligente. Se entiende entonces el motivo de plantear problemas que signifiquen desafíos y requieran conceptos de la disciplina.

En un intento de hacer una clasificación de las formas de resolver nos encontramos con

- problemas que se resuelven siguiendo un razonamiento lógico desde el planteo hasta alcanzar la solución o bien
- requieren una propuesta original; lo que demanda una cierta dosis de creatividad.

Muchos de los mejores problemas no pueden resolverse por ningún método conocido, sino que deben atacarse por lineamientos completamente originales. En ocasiones nos encontramos que determinados acertijos a veces serán resueltos con más facilidad por personas que sólo tienen buenas facultades naturales, que por las más instruidas. Veamos un ejemplo:

Problema 1. Correspondencia de números

Cada número de cuatro dígitos, en la tabla que sigue, se corresponde un valor numérico presentado a la derecha. ¿Qué valor corresponde al último número?

8008=6	1131=0	9312=1	5577=0
8293=3	2232=0	0090=4	3323=0
2132=0	8996=5	3113=0	7177=0
9887=5	5537=0	9069=4	7156=1
6835=3	7692=2	7171=0	6696=4
8688=??			

Pautas para resolver

Un amigo dice que este problema lo puede resolver un niño de pre-escolar en unos pocos minutos, a un artista le demandará un poquito más, los matemáticos realizarán interminables cálculos hasta encontrar la rama correcta de la matemática y quienes usen buscadores para encontrar la respuesta pueden llegar a un lugar equivocado. Es evidente que a cada número o secuencia de dígitos presentada se le ha asignado un cierto número o valor que estará respondiendo a algún patrón. El problema consiste entonces en encontrar ese patrón para alcanzar el resultado.

Resolución

El patrón al cual responden las cifras presentadas es la cantidad de líneas cerradas o agujeritos que se pueden contar. Al 8688 le corresponde el valor 7.

La satisfacción de resolver

Es notable el atractivo que un buen acertijo ejerce sobre mucha gente. Aún a sabiendas de que es un asunto trivial nos sentimos impulsados a dominarlo; y cuando lo hemos logrado nos inundan un placer y una sensación de satisfacción que son recompensa suficiente para nuestros esfuerzos, aun cuando no haya ningún premio que ganar. ¿Cual es este misterioso atractivo que tantos encuentran irresistible? El hecho curioso es que en cuanto el enigma ha sido resuelto, el interés generalmente desaparece. Lo hemos logrado, y esto es suficiente. Pero, ¿por qué hicimos el intento de resolverlo? La respuesta es simplemente que nos da placer buscar la solución y más aún encontrarla. Un buen acertijo, al igual que la virtud, es su propia recompensa. No nos gusta sentir inferioridad mental respecto a quienes nos rodean. El espíritu competitivo es innato en el hombre; estimula al niño más pequeño, en los juegos o en el estudio, para mantenerse al nivel de sus compañeros, y en la vida adulta convierte a los hombres nobles en grandes descubridores, inventores, oradores, héroes, artistas, y, si tiene propósitos más materiales, quizás en millonarios.

Cierto es que debemos disponer de alguna técnica para encarar con probabilidad de éxito el intento de resolución; caso contrario estaremos ingresando a un terreno de frustración. Por eso es que vamos a sugerir algunas estrategias para resolver problemas.

Como parece influir la experiencia

	Experiencia en la resolución de problemas	
	Baja	Alta
Cantidad de Ideas para resolver	Pocas	Demasiadas
Consecuencias	No encuentra camino adecuado para resolver	Debe elegir entre muchos caminos posibles cual es el más adecuado para resolver
¿Que necesita?	Conocer diferentes métodos generales de resolución	Saber elegir de entre los diferentes métodos cual es el más adecuado.

Estrategias para la Resolución de Problemas

Resolver problemas es una actividad esencialmente creativa. No es razonable esperar recetas para resolver. Podemos distinguir etapas y destacar los logros esperables en cada una.

Comprensión

Aunque parezca una verdad de Perogrullo no estará de más puntualizar la importancia de haber comprendido perfectamente el problema antes de intentar cualquier avance. Para ello puede ayudar formularse estas preguntas:

- ¿Qué se pide?
- ¿Qué datos se tienen? (explícitos e implícitos).
- ¿Qué relaciones existen?
- ¿Qué condiciones se han impuesto?
- ¿Existen diferentes casos posibles?

Esta etapa se puede considerar cumplida cuando se tenga identificado claramente el objetivo. Podremos así decir que sabemos dónde estamos y hacia dónde queremos ir.

Planificación

El paso siguiente es encontrar una conexión entre la información que se ofrece y aquello que se pregunta, esto es, diseñar un camino para alcanzar la solución. Para ello podemos aplicar las siguientes ideas:

- Dividir en problemas más pequeños, particularmente cuando tengamos problemas complejos.
- Identificar algún patrón repetitivo, que tal vez sea ésa la clave de su resolución.
- Identificar algún problema similar, relacionado con el que tenemos que resolver pero que tenga una solución conocida del que podamos inferir pistas para llegar a la solución final.
- Separar en casos, cuando sea posible, de forma que sea sencillo encontrar una solución diferente para cada caso. Ver ejemplo en el Problema 19.
- Imaginar que el problema ha sido resuelto para, a partir de la solución, ir pensando hacia atrás, hasta llegar a los datos originales. Bastará recorrer la secuencia de pasos en sentido inverso para encontrar la solución. Técnica muy útil en problemas de geometría.

En la búsqueda de caminos para resolver, dedicando suficiente esfuerzo, en algunos problemas se pueden encontrar diferentes variantes. Esto indica la conveniencia de darse unos momentos para buscar estas posibilidades antes de intentar resolver por el camino que primero se nos presenta.

Ejecución

Una vez trazado el plan, hay que ponerlo en práctica. Al llevarlo a cabo debe chequearse cada paso y escribir los detalles que lo hacen correcto.

Comprobación

Verificar el resultado, buscando posibles inconsistencias, ambigüedades, errores en las soluciones. Comprobar signos y unidades. Hacer algún experimento para ver que la respuesta tiene sentido.

Actividad intelectual

Es reconocido que el cuerpo humano está hecho para realizar actividad física. Los ingenieros diríamos que, entre otras cosas, fue diseñado con ese fin. Los rollos alrededor de la cintura y los estómagos abultados, vulgarmente conocidos como choperas, no vienen de fábrica. Se desarrollan favorecidos por el sedentarismo.

Cuando se alcanza ese estado físico no le pidamos al cuerpo que afronte un rato de trote, ni siquiera una caminata. ¿Causa? Los músculos se han ido atrofiando y han perdido tonicidad y capacidad de responder a mínimas exigencias. El cerebro humano tiene características similares. Las neuronas, al igual que los músculos, si no son ejercitadas en forma regular se tornan perezosas.

Se puede comprobar entonces un paralelismo entre la actividad física y la actividad intelectual. Los músculos que trabajan se acostumbran al esfuerzo y pueden responder a exigencias crecientes; en el caso de nuestro intelecto es posible prepararlo para que responda de la mejor forma posible ejecutando regularmente alguna clase de gimnasia mental. O como diría un director técnico: entrenándose.

Y ya que mencionamos al director técnico veamos una analogía que terminará de convencernos sobre la conveniencia de la actividad mental regular. ¿Usted cree que un director técnico responsable va a poner en la cancha jugadores que no tengan una buena preparación física por más que sean los mejores del mundo? En pos de conseguir el mejor resultado posible, seguro que no. Bien, entonces será fácil comprender la diferencia de resultados en actividad intelectual con mentes agilizadas versus mentes perezosas.

La representación gráfica, cuya puesta en práctica nos lleva indefectiblemente a resolver problemas, no solamente es una disciplina imprescindible en la técnica sino que también es una gran oportunidad para mantener en forma el cerebro.

Capítulo 2
Representaciones planas

Implementación

Existen varias formas de materializar una representación gráfica, a saber:

- croquis técnico,
- trazado con instrumentos y
- trazado con software CAD

Croquis técnico

Se realiza a mano alzada, empleando únicamente lápiz, papel y goma de borrar. Exige destreza manual que se puede desarrollar con la práctica; carece de precisión pero es el más rápido de todos. Ideal para tomar notas y comunicar ideas.

Trazado con instrumentos

Se utilizan instrumentos de trazado para guía y medición. Se consigue buena precisión y exactitud. Los trabajos insumen más tiempo que los realizados en forma de croquis. Hasta la aparición de los programas CAD era la forma de trabajar en representación gráfica.

Trazado con software CAD

La sigla CAD es la abreviatura del término inglés 'Computer Aided Design'. Desde que aparecen los primeros programas para trazado han ido reemplazando progresivamente al trazado con instrumentos.

El trazado con software CAD requiere adiestramiento para su manejo e insume tiempo en su ejecución; pensemos que para cada elemento geométrico que queramos ubicar nos serán solicitados todos los datos necesarios para hacerlo. El beneficio es que los trazados alcanzan total exactitud y precisión. Otra ventaja importante es que, al reutilizarse el trabajo realizado previamente, las modificaciones y correcciones se resuelven con mayor rapidez.

Trazado de curvas

Trazamos curvas que, o bien forman parte de la representación de un objeto o tienen por objeto mostrar la evolución de una función matemática. La discusión de una ecuación y su representación gráfica constituyen, en conjunto, un problema de gran importancia en todas las ramas de la matemática y sus aplicaciones; se le ha dado el nombre especial de 'Construcción de Curvas'.

El software CAD dispone de comandos para el trazado de algunas curvas muy comunes: planas, como circunferencias, elipses y sus correspondientes arcos o bien tridimensionales, como hélices. Se obtienen las curvas invocando el comando e ingresando los parámetros correspondientes en cada caso. Si a la hélice le damos altura nula el resultado será una curva plana, la espiral de Arquímedes.

Cuando las curvas que se requieren no están contempladas entre los comandos del software será necesario determinar los puntos de paso para su trazado. Nos encontramos así con que una curva puede ser trazada

- por cálculo: Se determinan las coordenadas de una cantidad adecuada de puntos.
- por método de trazado; similar al trazado con instrumentos tradicionales.

Técnicas alternativas de trazado

Presentaremos técnicas de trabajo alternativas para el trazado de una curva, la parábola, procurando que sirva de modelo para cualquier tipo de curva.

- Por su definición
- Como envolvente de tangentes
- Por construcción geométrica
- Por su ecuación
- Mediante línea SPLINE con vértices de control
- Como sección plana de un cono

1.Por su Definición

Curva plana, abierta, de una sola rama, simétrica respecto de un eje, sobre el que se ubica un punto fijo llamado foco. Los puntos de la parábola cumplen la condición de equidistar del foco y de una recta normal al eje llamada directriz.

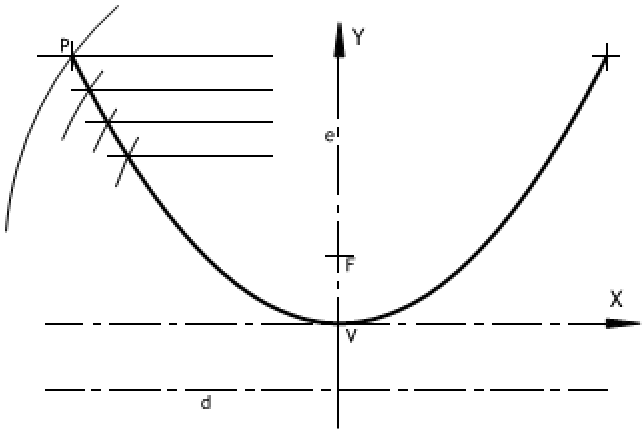


Figura 1. Trazado de Parábola según definición

- Aplicabilidad: para toda curva que tenga una definición geométrica.
- Ventajas: Los puntos de paso seleccionados son exactos.
- Desventajas: Requiere de la determinación manual de una cantidad de puntos, creciente con la precisión exigida. Exige gran laboriosidad.

2.Envolvente de tangentes

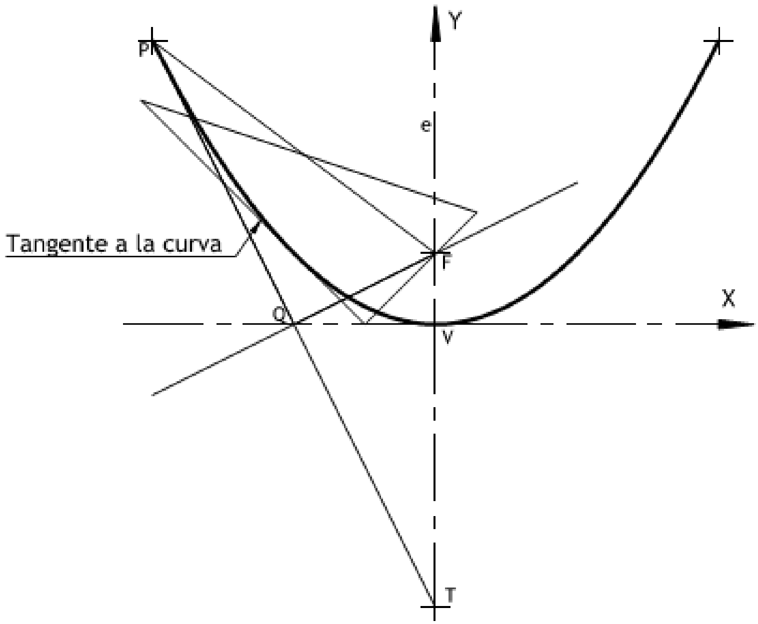


Figura 2. Parábola por envolvente de tangentes

- Aplicabilidad: cuando se conozca la definición del conjunto de rectas tangentes a la curva.
- Ventajas: Ninguna en particular.
- Desventajas: Requiere de la determinación manual de una cantidad de puntos, creciente con la precisión exigida. No se puede tener certeza sobre la exactitud de los puntos seleccionados. Exige gran laboriosidad.

3.Construcción geométrica

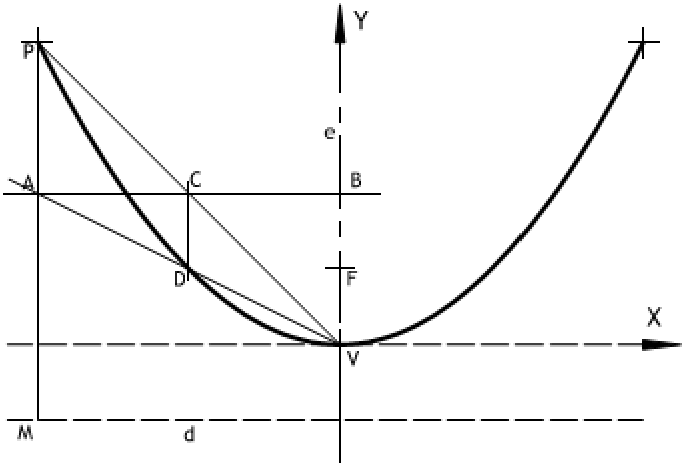


Figura 3. Parábola por eje, vértice y punto de paso

Se traza AB normal al eje e que corta PM en el punto A, unimos A con el vértice V; C es intersección de AB con VP. La paralela al eje e que pasa por C al cortar AV determina D, punto de paso de la parábola.

- Aplicabilidad: para toda curva que disponga de método constructivo.
- Ventajas: Los puntos de paso seleccionados son exactos.
- Desventajas: Requiere de la determinación manual de una cantidad de puntos, creciente con la precisión exigida. Exige gran laboriosidad.

4. Spline con vértices de control

Con software CAD se pueden trazar cónicas utilizando líneas *SPLINE* grado 3 con vértices de control. Modificando el peso del vértice ubicado sobre el eje de simetría de la curva se obtendrán diferentes cónicas a saber:

- Peso = 1 : parábola
- Peso > 1 : hipérbola
- Peso < 1 : arco de elipse

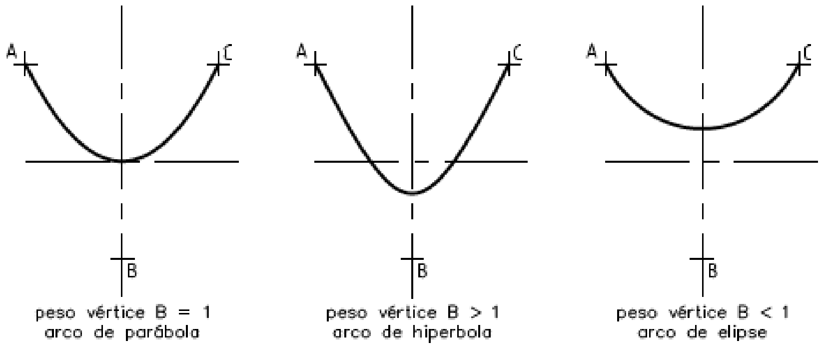


Figura 4. Línea ‘spline’ y vértices de control con diferente peso

El procedimiento para trazar la parábola consta de los siguientes pasos:

- Determinar el simétrico del punto dado respecto del eje de la parábola y
- Determinar un vértice de control sobre el eje de la parábola a una distancia del vértice igual a la distancia del vértice al punto dado medida sobre el eje de la parábola.
- Trazar una línea spline en modo ‘Vértices de Control’ seleccionando los puntos siguiendo el orden: punto de paso, vértice de control sobre el eje de la parábola y simétrico del punto de paso.

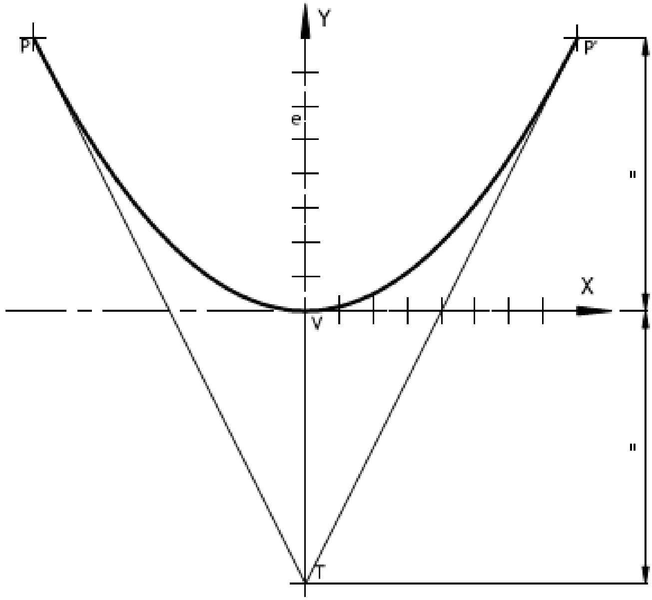


Figura 5. Parábola por línea spline y vértices de control

5.Por su ecuación

Los puntos de paso de la curva se determinan evaluando la función dentro del entorno de valores que se quiere representar.

En el caso presentado puntos de paso de la curva fueron calculados utilizando MS Excel sobre una plantilla que se ha preparado para estos casos.

En primer lugar se muestran los parámetros utilizados.

Curva	Parábola
Valor inicial	-8
Valor final	8
Divisiones	64
Coeficiente 'a'	0,125
División	0,25
Ecuación cartesiana	=c5*POTENCIA(C$14;2))

Y seguidamente un extracto de la tabla de valores.

Nro.	X	Y	Texto
0	-8	8,0000	-8,8
1	-7,75	7,5078	-7.75,7.5078125
2	-7,5	7,0313	-7.5,7.03125
3	-7,25	6,5703	-7.25,6.5703125
4	-7	6,1250	-7,6.125
5	-6,75	5,6953	-6.75,5.6953125
6	-6,5	5,2813	-6.5,5.28125
7	-6,25	4,8828	-6.25,4.8828125
8	-6	4,5000	-6,4.5
9	-5,75	4,1328	-5.75,4.1328125
10	-5,5	3,7813	-5.5,3.78125

La última columna es copiada y pegada en la ventana de texto cuando el software solicita datos para los puntos de la línea SPLINE.

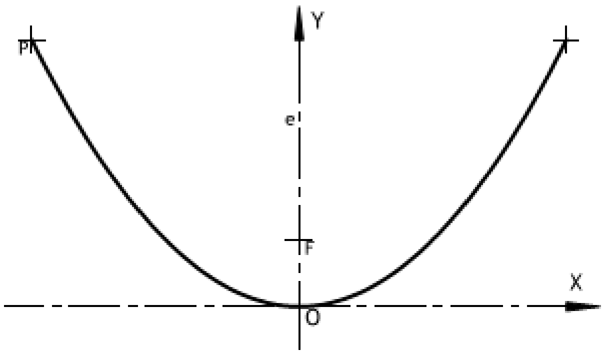


Figura 6. Parábola según su ecuación

- Aplicabilidad: para toda curva descripta por una función analítica.
- Ventajas: Los puntos de paso seleccionados son exactos. Se puede automatizar el proceso con suma facilidad.
- Desventajas: En tanto no se disponga la determinación de los puntos dentro de la propia herramienta CAD se estará dependiendo de una herramienta asociada.

6. Sección plana de un cono

Se puede generar la misma parábola anterior como sección plana de una superficie cónica adecuada.

Este método es de interés teórico únicamente. No resulta práctico frente a otros métodos vistos que son más directos. Sirve para verificar que seccionando adecuadamente una superficie cónica se puede obtener la parábola deseada.

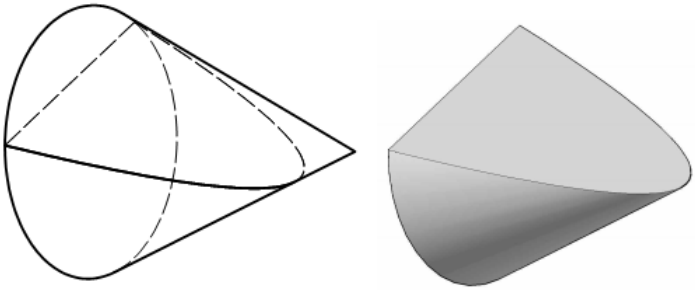


Figura 7. Parábola por sección plana de un cono

Después de construir una parábola especificada por un punto de paso y su vértice como resultante de una sección plana, consultando el software CAD, llegamos a la conclusión que se puede construir perfectamente como spline por vértices de control.

En splines cuadráticas de tres vértices, cuando el peso de los vértices extremos es 1, el peso del vértice intermedio determina el tipo de cónica resultante (arco elíptico, parábola o hipérbola)

Curiosidades

Los manuales que tratan sobre trazados geométricos describen diversos métodos para el trazado de cónicas utilizando compás, escuadra y hasta una tira de papel para trasladar distancias por lo que no abundaremos sobre ellos. Presentaremos una forma original de obtener una parábola y una elipse.

Parábola

El primero como método alternativo a los presentados en páginas anteriores destinado a la obtención de una parábola mediante plegado de papel. Para implementarlo será necesario disponer de una hoja rectangular y proceder de la siguiente forma:

- Elegimos un filo de la hoja; será la directriz de la parábola.
- Marcamos un punto F cercano a la directriz. Este punto será el foco de la parábola y servirá como punto de apoyo.

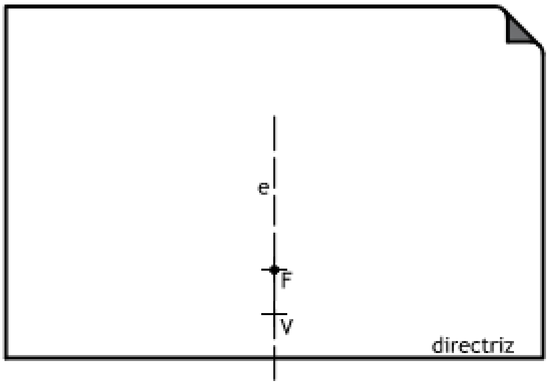


Figura 8. Preparación papel para plegar tangentes de parábola

- Realizamos pliegues de la hoja tales que el filo elegido como directriz pase por el foco F de la parábola; el pliegue obtenido será una tangente a la parábola; como se muestra en figura 9.

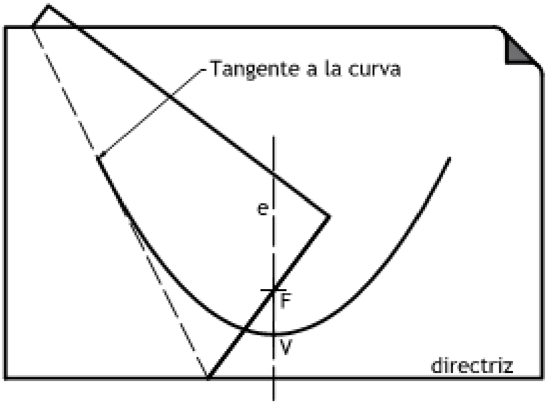


Figura 9. Plegado del papel para obtener una tangente

- A medida que se repite este último paso irá apareciendo progresivamente la forma de la parábola como se muestra en la figura 10.

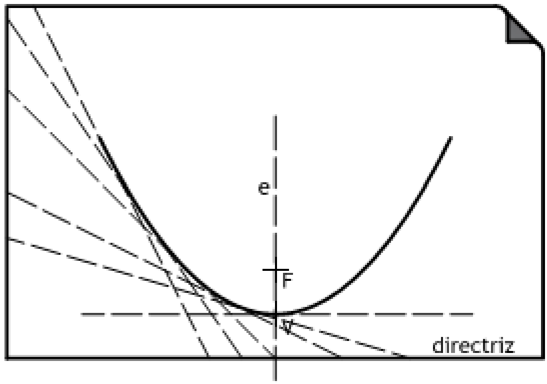


Figura 10. Pliegues del papel forman una parábola

Después de repetir el plegado suficiente cantidad de veces nos encontraremos con que la envolvente de las líneas que han quedado marcadas en el papel es una parábola. El punto de apoyo es el foco de la parábola.

Elipse

Para obtener la elipse será necesario disponer de un círculo recortado sobre un papel o bien una circunferencia trazada sobre un papel que al ser plegado, por transparencia, permita apreciar la circunferencia. En el interior del círculo marcamos un punto de apoyo A, como se muestra en figura 11.

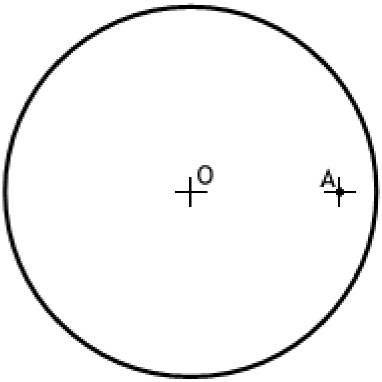


Figura 11. Círculo con su centro y un punto de apoyo

Como paso siguiente plegamos el papel de forma tal que algún punto de la circunferencia pase por el punto de apoyo como se ve en figura 12.

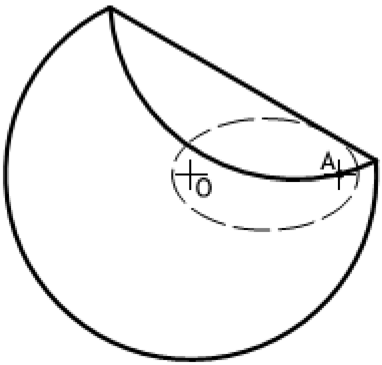


Figura 12. Marcado de pliegues

Después de repetir el plegado suficiente cantidad de veces nos encontraremos con que la envolvente de las líneas que han quedado marcadas en el papel es una elipse. El centro de la circunferencia y el punto de apoyo son focos de la elipse.

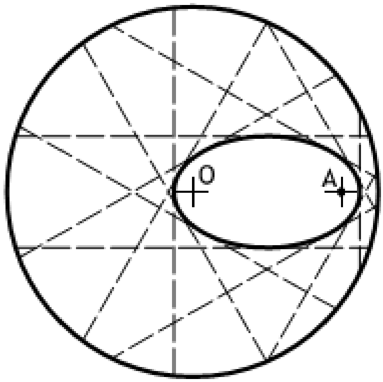


Figura 13. Elipse definida por pliegues de circunferencia

Demostración de teoremas

La representación gráfica se puede utilizar para demostrar teoremas. El teorema de Pitágoras debe ser uno de los que tiene mayor cantidad de demostraciones diferentes. Elisha S. Loomis en su libro "The Pythagorean Proposition" catalogó 367 pruebas diferentes. Las hay de varias clases: analíticas, basadas en resultados de otros teoremas y geométricas. Presentamos una solución gráfica, de las más conocidas, atribuida al propio Pitágoras.

El teorema dice que "en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Para demostrarlo construimos dos cuadrados de lados a+b a los que dividimos como se muestra en la figura 14.

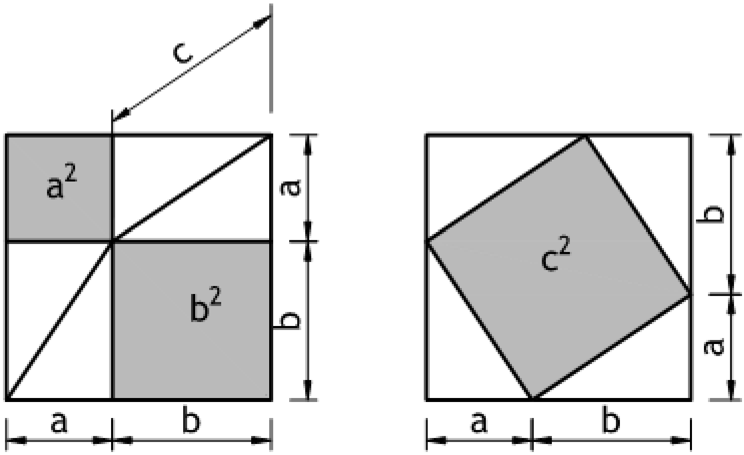


Figura 14. Demostración gráfica del Teorema de Pitágoras

En la imagen izquierda el área sombreada es igual a a^2+b^2, correspondiente a la superficie de dos cuadrados de lados a y b respectivamente.

En la imagen derecha el área sombreada es igual a c^2, corresponde a la superficie de un cuadrado de lados c.

Se comprueba que en ambos casos el área sombreada es igual a la diferencia entre el área del cuadrado de lado a+b y los cuatro triángulos rectángulo de catetos a y b. Por lo que se infiere que el área sombreada es igual en ambos casos. Es decir $a^2+b^2=c^2$

Problemas varios

Los problemas que se plantean a continuación muestran la variedad de situaciones en que la representación gráfica puede resultar útil.

Problema 2. Cinco circunferencias

Se tienen 25 puntos dispuestos en una grilla de 5 x 5. Encontrar un conjunto de 5 circunferencias que pasen por cada uno de los 25 puntos al menos una vez.

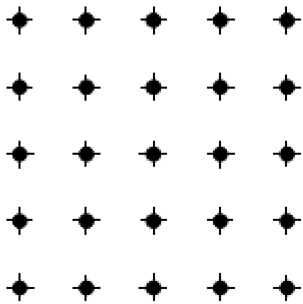


Figura 15. Grilla con distribución de puntos

Este problema admite varias soluciones. Se presenta una de ellas.

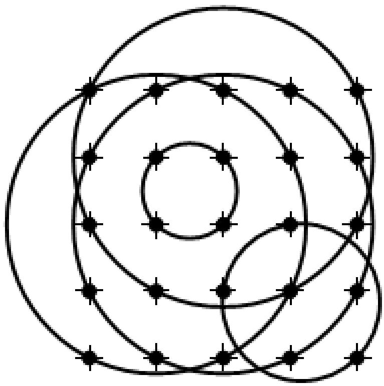


Figura 16. Una solución al problema de las cinco circunferencias

Problema 3. Dividir en triángulos

Se tiene un triángulo isósceles, con lados de proporciones 3, 2 y 2. El ángulo entre los dos lados iguales es aproximadamente 97° (triángulo obtusángulo). ¿Cómo se podrá cortar en una serie de pequeños triángulos que sean todos isósceles acutángulos, es decir, todos los ángulos menores de 90 grados? *Propuesto por Elliott Line en Puzzle Sig*

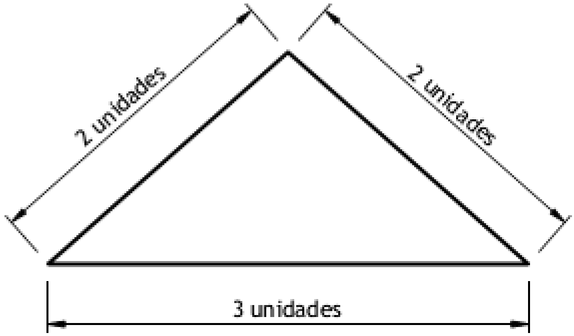


Figura 17. Triángulo a dividir en triángulos

Pautas para resolver

Considere que al solicitar triángulos isósceles habrá requerimientos de simetría; fuera de esto no existe una secuencia de razonamiento que nos lleve a encontrar una solución. Este problema exige pensamiento de tipo creativo. Habrá que realizar pruebas por diferentes caminos hasta encontrar una solución aceptable.

Solución

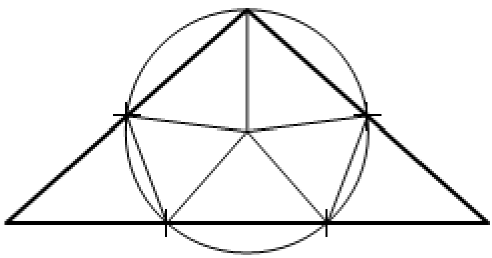


Figura 18. Triángulo dividido en triángulos isósceles

Problema 4. Triángulo equilátero con una servilleta

No es de extrañar que siendo uno profesor de representación gráfica me hayan planteado problemas geométricos en situaciones o lugares insólitos. Fue así que estando en un bar, me pidieron que materializara un triángulo equilátero. Por supuesto que se trataba de hacerlo con los materiales disponibles en ese momento; es decir, una servilleta de papel. Verificamos las proporciones del accesorio gastronómico y resultó ser un cuadrado que a partir de ese momento consideramos un cuadrado perfecto. ¿Qué hubiese hecho usted?

Pautas para resolver

Para asimilarse a la situación planteada solo necesita una hoja de papel cuadrada; si es rectangular debería marcarla para que con un plegado previo se transforme en un cuadrado.

Ahora piense las características del triángulo equilátero.

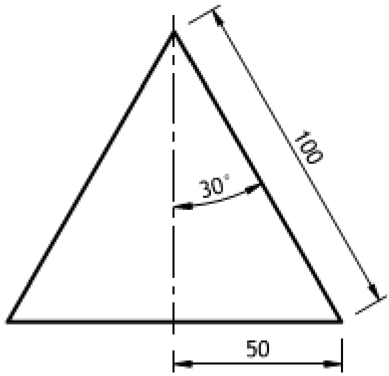


Figura 19. Proporciones del triángulo equilátero

Y a continuación como se vería ese triángulo en el cuadrado.

Resolución

En el triángulo equilátero los ángulos internos son todos iguales a 60°. Nos proponemos como objetivo determinar ángulos de 30° o de 60° dentro del cuadrado. Observando las proporciones del triángulo equilátero vemos que las podemos replicar dentro del cuadrado de la siguiente forma:

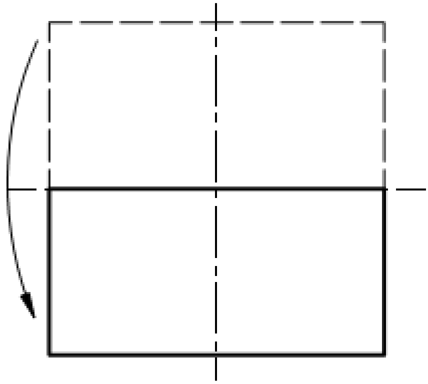


Figura 20. Primer pliegue para marcar el cuadrado

Plegamos el cuadrado por la mitad y marcamos ese pliegue para poder utilizarlo posteriormente.

A continuación se realiza un segundo pliegue que pase por un vértice del cuadrado y la esquina adyacente apoye en el pliegue realizado anteriormente.

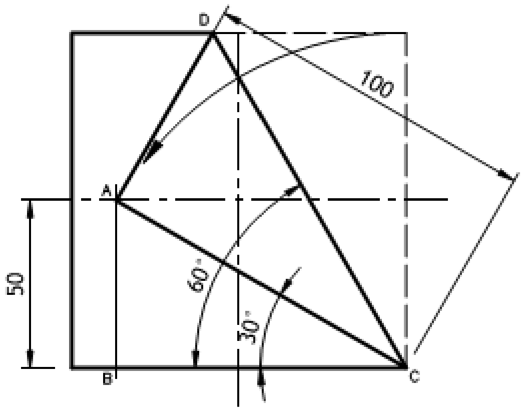


Figura 21. Segundo pliegue. Deja un ángulo de 60°

Tal como nos habíamos propuesto se ha conseguido formar un ángulo de 60°.

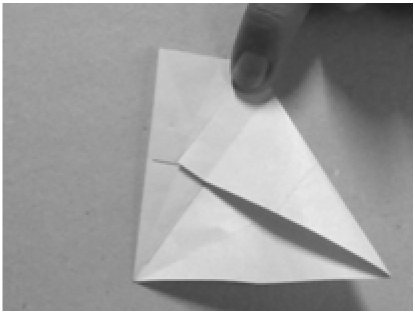


Figura 22. Como se vería el segundo pliegue del cuadrado

Se hace un pliegue simétrico del segundo con lo que ya queda marcado el triángulo equilátero en el cuadrado.

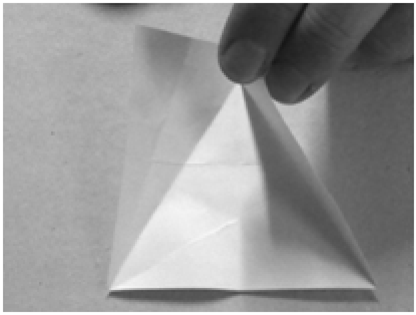
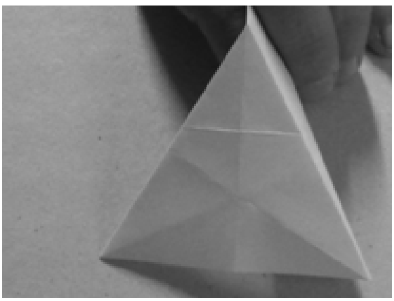


Figura 23. Cuadrado con pliegues

Y finalmente se puede mostrar el resultado.



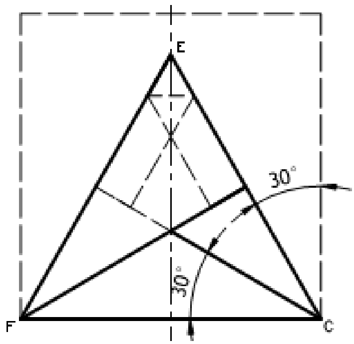


Figura 24. Triángulo equilátero plegado en el cuadrado

Problema 5. El mejor triángulo

No conformes con ver resuelta la obtención del triángulo equilátero me pidieron obtener el triángulo equilátero más grande posible con la servilletita cuadrada que cada vez me parecía más chiquitita. O sea, partiendo de un trozo de papel cuadrado, plegarlo de manera tal que se obtenga el mayor triángulo equilátero posible.

Pautas para resolver

Siguiendo una de las sugerencias de las técnicas para resolver problemas vemos que el problema anterior nos puede dar alguna idea para resolver; solo que ahora debemos pensar como se puede aumentar el tamaño del triángulo presentado.

Resolución

A poco de observar la figura lograda en el problema anterior vemos que si giramos el triángulo alrededor de unos sus vértices de modo que coincida con un vértice del cuadrado, como muestra el croquis a la derecha, hay espacio para incrementar sus medidas.

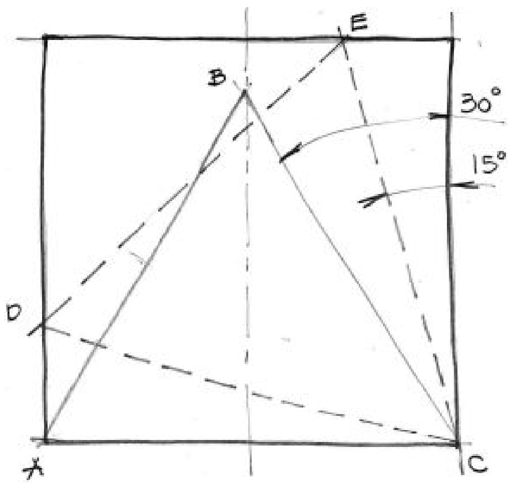


Figura 25. Girar permite agrandar la figura

Si el giro es de 15° podremos agrandar el triángulo, alargando los lados hasta intersecar los lados del cuadrado.

Trabajando sobre el papel debemos hacer pliegues que dividan en dos al ángulo de 30°. Los nuevos pliegues marcan un par de lados. Un nuevo pliegue que pase por la intersección de los pliegues últimos con el borde del papel demardemarcará el lado faltante.

El triángulo que obtenido se puede apreciar en la figura 26.

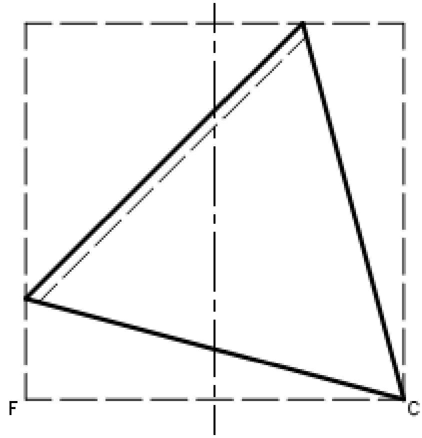


Figura 26. Prolongación lados del triángulo

Problema 6. Medir en un cuadrado

El lado del cuadrado grande es 50. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?

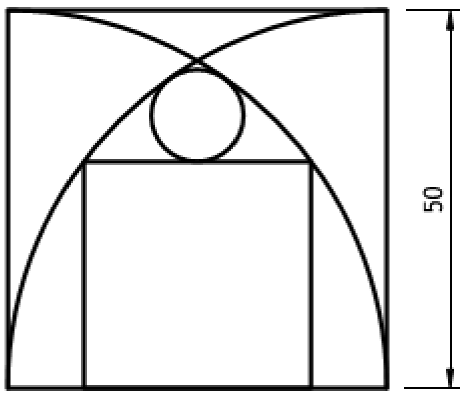


Figura 27. Determinar radio de la circunferencia

Pautas para resolver

Interesa destacar que este problema puede ser resuelto por alguno de los siguientes métodos: algebraico, gráfico o CAD.

Resolución por Método Algebraico

En la figura 28 identificamos algunos puntos de interés para nuestro análisis.

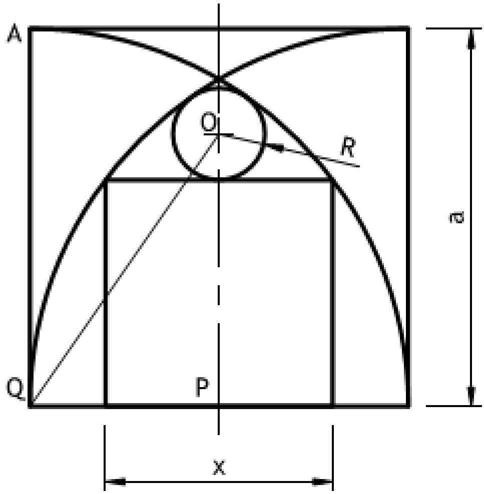


Figura 28. Identificaciones para el análisis.

En primer lugar calculamos el lado del cuadrado interior.

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{x}{2}\right)^2+x^2=a^2 ==> (x+a)^2+4x^2=4a^2$$

Resolviendo, obtenemos

$$x=\frac{3}{5}a=\frac{3}{5}\times 50=30$$

Con estos datos podemos calcular el radio de la circunferencia.

$$\left(\frac{3}{5}a+R\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=(a-R)^2 \ \rightarrow \ R$$

$$R=\frac{39}{320}a=12{,}1875$$

Resolución por Método Gráfico

Es evidente que por ser una figura simétrica, el punto medio S del lado del cuadrado interior será el de tangencia a la circunferencia. Prolongamos el lado AQ hasta cortarse con el arco de circunferencia de centro Q para determinar el punto B. Unimos B con S y prolongamos hasta cortar al arco de circunferencia en T. Éste será el punto de empalme entre la circunferencia buscada y el arco Q.

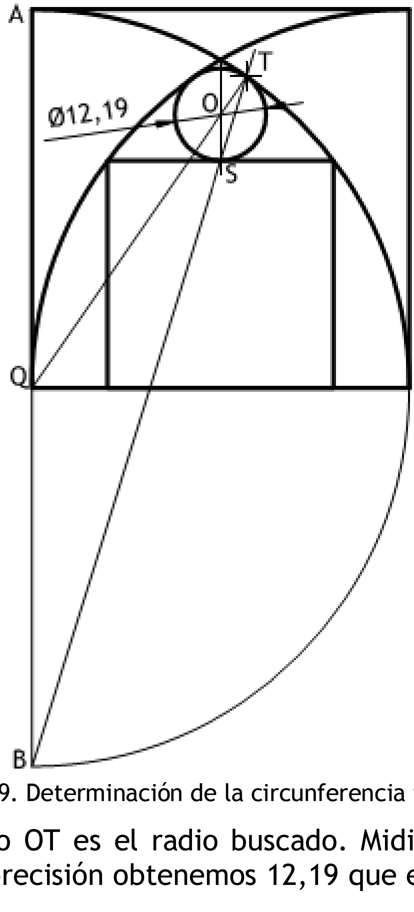


Figura 29. Determinación de la circunferencia tangente

El segmento OT es el radio buscado. Midiéndolo con dos decimales de precisión obtenemos 12,19 que es la cifra exacta redondeada.

Resolución por Método CAD

Con el software CAD se realiza el trazado en base a los datos provistos.

Se traza la circunferencia por tres puntos. Se los elige utilizando la tangencia como referencia a objetos con los dos arcos y el lado del cuadrado.

Se consultan las propiedades de la circunferencia y se obtiene el mismo resultado.

Problema 7. Una cuerda en la plaza

En la plaza hay dos estacas perfectamente verticales, separadas 1,70 metro entre sí. Una de las estacas tiene 2,00 metros de altura; la otra 1,30 metro.

Colgamos una cuerda de 2,40 metros entre los puntos más altos de cada estaca. De la cuerda vamos a colgar una pesa y pretendemos ubicarla en el lugar más bajo posible.

Queremos saber dónde va a estar el punto buscado en relación con las estacas y a qué altura va a quedar.

Pautas para resolver

Conviene hacer un esquema que permita visualizar los elementos que intervienen en el problema. Lo hacemos en forma de croquis que, para el objetivo buscado, es más que suficiente.

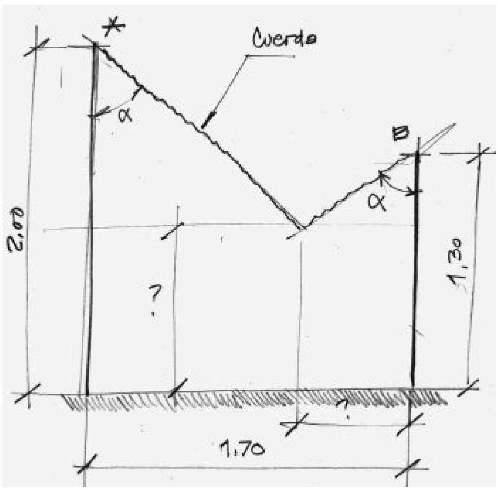


Figura 30. Esquema de la cuerda en la plaza

Observamos lo siguiente: si desplazamos la pesa entre las estacas, el punto en que cuelga la pesa describe una elipse. El movimiento de la pesa coincide con la técnica de trazado conocida como método del Jardinero. Y aquí lo dejamos para que usted intente resolverlo antes de mirar la solución.

Solución

Los puntos de anclaje a las estacas hacen de focos de la elipse. El punto más bajo coincidirá con el punto donde se produzca la tangencial de una recta horizontal con la elipse.

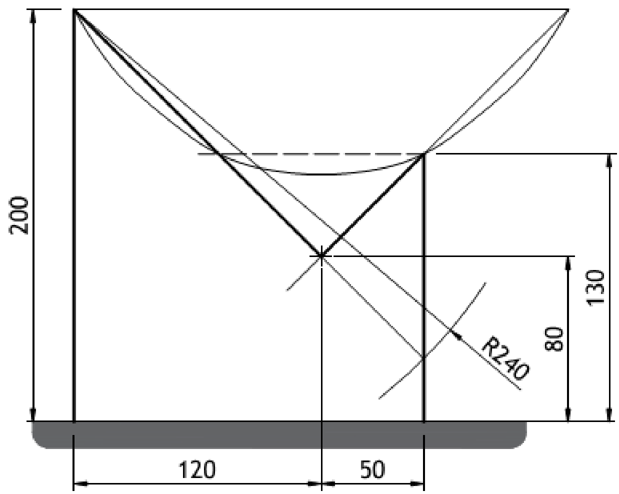


Figura 31. Determinación del punto más bajo de la cuerda

Problema 8. ¿Qué área es más grande?

Las máscaras de figura 32 están compuestas por lúnulas las cabelleras y por un cuadrado y un triángulo las barbas. Se denomina lúnula a la parte del plano comprendido entre dos arcos de círculo con los mismos extremos y con las concavidades hacia el mismo lado.

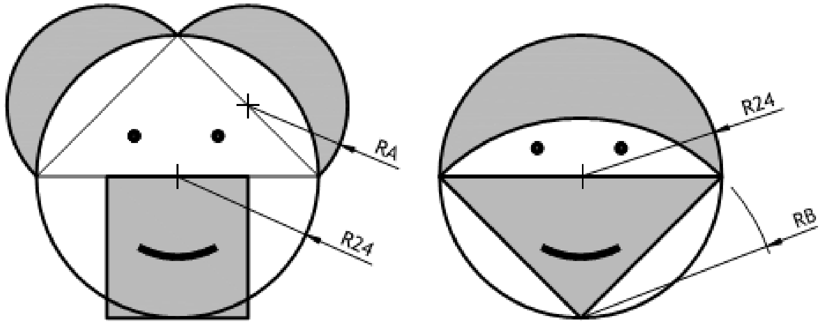


Figura 32. Comparación de lúnulas

La pregunta es: en los dos dibujos dados, ¿Qué ocupa más superficie? La barba o la cabellera; es decir, se deben comparar las áreas sombreadas.

Pautas para resolver

Observando las barbas notamos que el cálculo de la superficie es inmediato. La resolución gráfica de este problema se simplifica totalmente si utilizamos software CAD.

Resolución

Debemos construir las figuras propuestas cuidando especialmente que las áreas de interés queden perfectamente cerradas para entonces poder consultar la superficie al propio software.

En la figura del lado izquierdo la cabellera tiene una superficie de 576 mm2. Igualmente la barba ocupa 576 mm2.

Midiendo la cabellera del lado derecho encontramos que tiene 576 mm2. Igualmente la barba también ocupa 576 mm2.

Capítulo 3
Cálculo gráfico

Se pueden realizar cálculos gráficamente. Desde los más simples hasta algunos muy complejos. Esto no quiere decir que se pretenda suplantar el cálculo algebraico. Se quiere poner de relieve que disponemos de un método alternativo de cálculo. En algunos casos será conveniente utilizar el método algebraico, en otros el método gráfico. El calculista decidirá cuál es el más adecuado. También cabe la posibilidad de utilizar un método para el cálculo y el otro para la verificación; por ejemplo, en el Problema 10. Cruce de botes.

Escalas

Sea que tengamos que representar gráficamente un objeto o las magnitudes que intervienen en un cálculo debemos adoptar una relación entre las magnitudes representadas y los segmentos que las representan; esto es lo que se conoce como escala.

Toda representación gráfica debe llevar la escala utilizada. Difiere la forma de definir una escala según sea que estemos representando unidades de longitud u otro tipo de unidades.

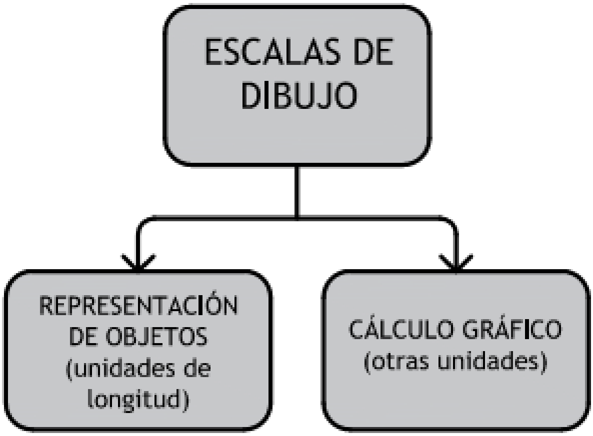


Figura 33. Criterios para escalas de dibujo

Escalas para representación de objetos

Son necesarias para la representación de objetos que exceden el tamaño del plano a realizar o cuando son muy pequeños, cosa que impediría apreciar los detalles.

Una escala de dibujo es la relación entre la dimensión dibujada y la dimensión real.

$$Escala\ de\ dibujo = \frac{Tamaño\ en\ el\ dibujo}{Tamaño\ real}$$

Cuando el numerador de la fracción es mayor que el denominador, tenemos una escala de ampliación, y en caso contrario será de reducción. La escala 1:1 corresponde a un objeto dibujado a tamaño real y le llamaremos escala natural.

Escalas para cálculo gráfico

El cálculo se realiza representando las diferentes magnitudes intervinientes con longitudes proporcionales a las mismas.

Al operar gráficamente se aconseja representar una muestra de la escala que permitirá comprobar los cálculos realizados.

$$Escala\ para\ cálculo\ gráfico = \frac{Unidad\ de\ medida\ representada}{Tamaño\ en\ el\ dibujo}$$

Para representar una magnitud determinada dividimos su valor por la escala. Al extraer un resultado multiplicamos la longitud del segmento que lo representa por el valor de la escala. Se puede acompañar la representación con una escala gráfica ayuda a lograr una rápida aproximación al valor buscado.

Operaciones Aritméticas

Resolvemos gráficamente operaciones aritméticas disponiendo segmentos de longitud proporcional a los números que representan utilizando una escala conveniente.

Suma

La suma se resuelve gráficamente yuxtaponiendo segmentos representativos de los sumandos sobre una recta. El segmento resultante pasado a través de la escala nos devuelve el resultado.

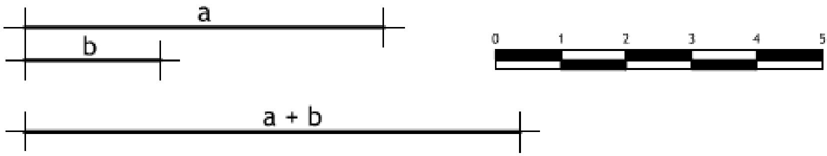


Figura 34. Suma gráfica

Resta

Encontramos gráficamente la diferencia entre dos números superponiendo segmentos representativos de los mismos sobre una recta de forma tal que coincidan en uno de sus extremos; el segmento que une los extremos no coincidentes representa la diferencia que evaluamos a través de la escala.

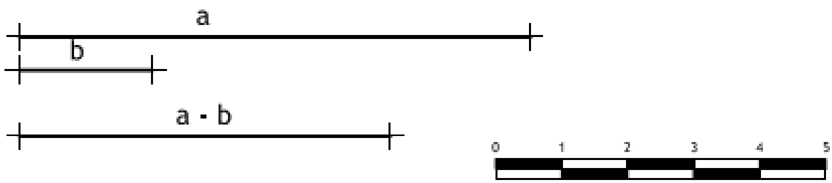


Figura 35. Diferencia gráfica

Multiplicación

Las construcciones gráficas que siguen se justifican en el Teorema de Thales. Permiten resolver operaciones de multiplicación, división y elevar al cuadrado.

Resolver el producto de dos números se puede elaborar de la siguiente forma:

$$a = b \times c$$
$$a \times 1 = b \times c$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{1}$$

Según Thales se puede presentar gráficamente como muestra la figura 36 donde colocamos los segmentos representativos de los operandos a partir del punto común de dos rectas concurrentes.

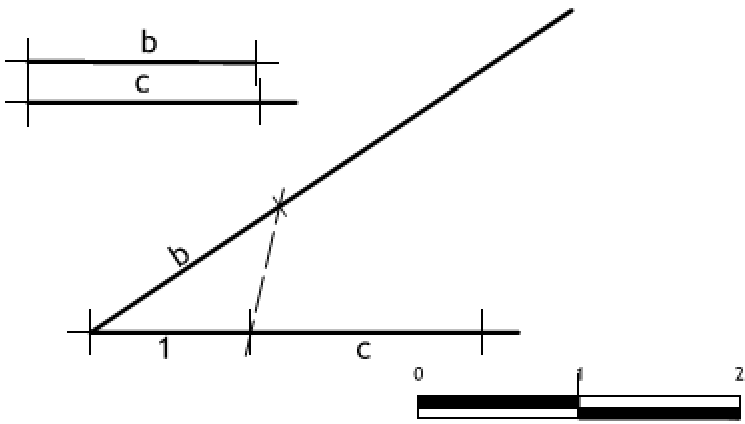


Figura 36. Presentación de la multiplicación gráfica

En figura 37 tenemos el resultado de la multiplicación gráfica.

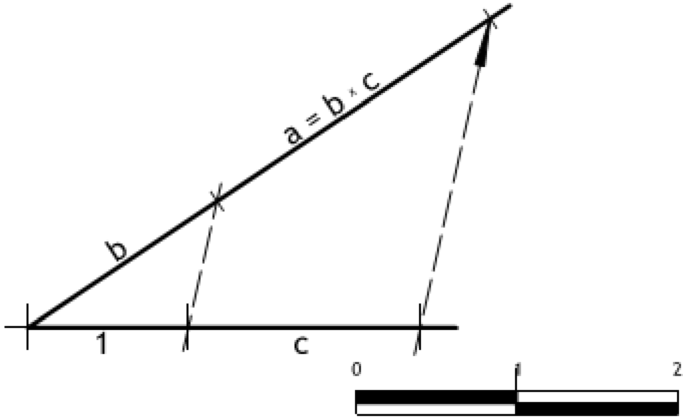


Figura 37. Resultado de la multiplicación gráfica

División

También con el teorema de Thales podemos resolver un cociente.

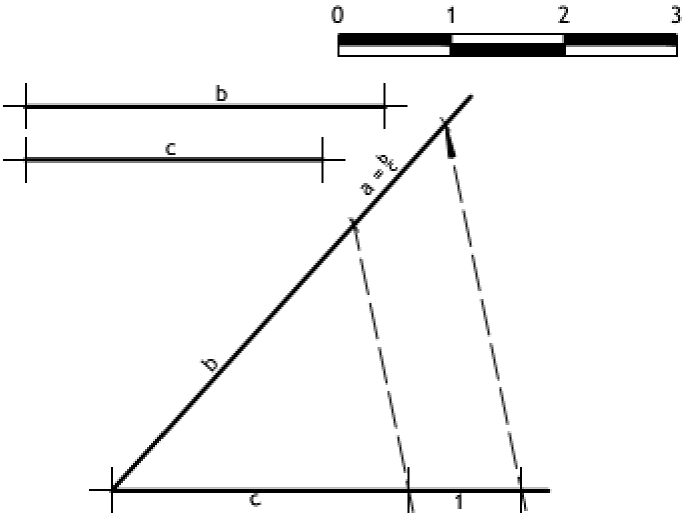


Figura 38. División gráfica

Potenciación

Una potencia se puede tratar en forma similar a una multiplicación. Así en el caso de elevar un número b al cuadrado se resuelve como muestra la figura 39.

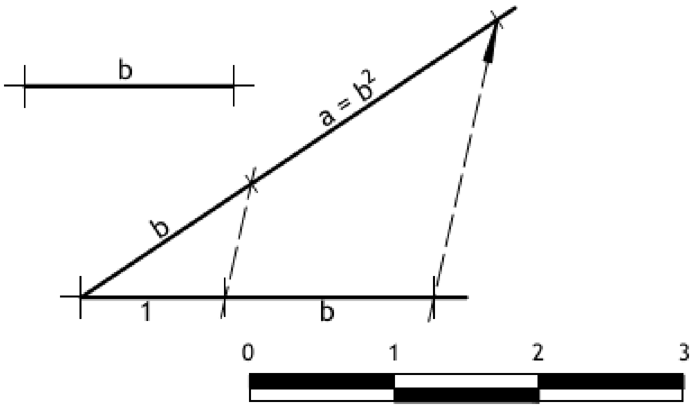


Figura 39. Elevación al cuadrado

Raíz cuadrada

Una raíz cuadrada se puede resolver aplicando el concepto de medio proporcional en una construcción gráfica. Esta última se justifica en el teorema de la altura, el cual establece que en un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa es la media geométrica entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa.

En la ecuación

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{1}$$

a es medio proporcional entre b y 1. Podemos expresar esta última como $b = a^2$ o lo que es lo mismo $a = \sqrt{b}$

Representamos el número b con un segmento MN y a continuación la unidad NP. Trazamos una semicircunferencia de diámetro $b + 1$ con centro en el punto medio de MP. Trazamos una perpendicular a MP por el punto N que corte a la semicircunferencia en Q. El segmento NQ representa la raíz cuadrada del segmento MN. Ver figura 40.

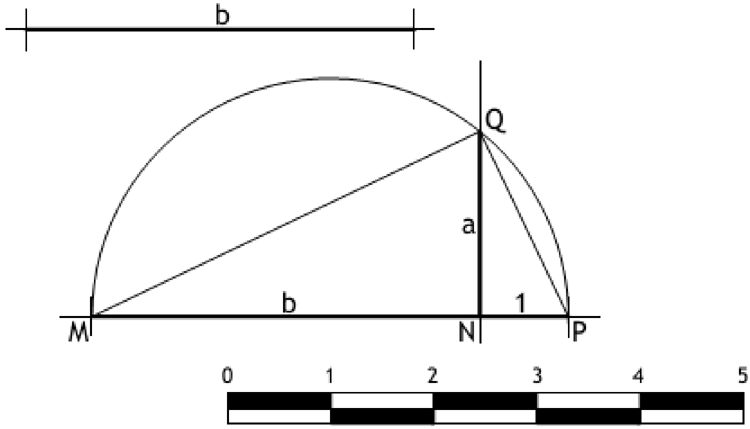


Figura 40. Raíz cuadrada por el medio proporcional

Problemas

Problema 9. El camino del minero

Un minero tiene su casa 6km al norte del río. Debe ir hasta una mina distante, en línea recta, a 15 km de su casa y 3 km al norte del río. No puede viajar en línea recta porque el burro con que se traslada necesita detenerse a beber agua en algún punto del río. ¿Con qué rumbo debe partir en su viaje a la mina para reducir al mínimo la distancia a recorrer?

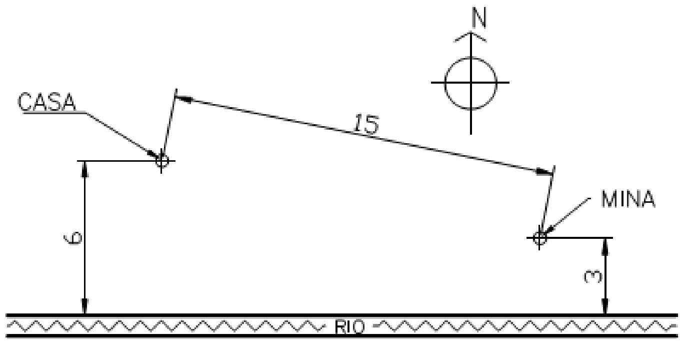


Figura 41. Mapa de la casa del minero y la mina

Pautas para resolver

En términos geométricos podríamos decir que se pide encontrar un punto 'X' sobre la recta 'r' que minimice la suma de distancias a los puntos 'C' y 'M'; siendo 'C' y 'M' la casa y la mina respectivamente.

El paso siguiente sería analizar los diferentes casos que se pueden presentar, a saber:

- Uno de los dos puntos está sobre la recta 'r'. Ese punto es la solución.
- Ambos puntos están sobre la recta 'r'. Infinitas soluciones. Cualquier punto del segmento lo es.
- Los puntos están ubicados en diferentes semiplanos respecto de la recta 'r'. La intersección de la recta 'r' con el segmento C-M, punto X, es la mejor solución ya que los puntos dados quedan unidos por una línea recta.

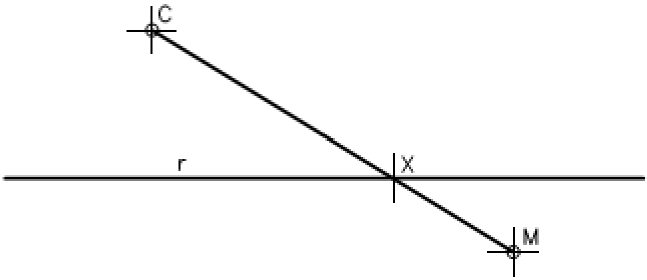


Figura 42. Suma mínima cuando X y R en distintos semiplanos

- Ambos puntos están en el mismo semiplano respecto de la recta 'r'. Es nuestro caso y sugerimos intentar resolverlo viendo la solución del problema más simple ya resuelto.

Resolución

Trazado el simétrico de M respecto de la recta imaginaria que traza el río, tendremos M' que nos lleva al problema ya resuelto en figura 42. Ya que CM = CM', entonces X será el punto buscado ya que cualquier otro alargaría el recorrido.

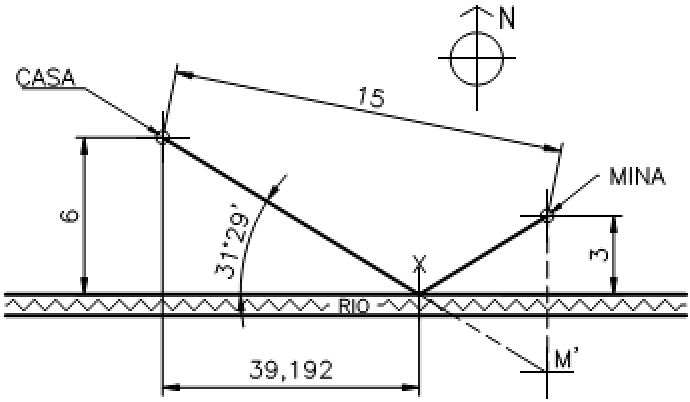


Figura 43. Solución al problema del minero

Problema 10. Cruce de botes

Dos botes inician el cruce de un río desde orillas opuestas, simultáneamente y navegando a velocidades constantes pero diferentes. Se cruzan a 700 metros de una de las orillas y continúan navegando hasta completar el ancho del río, desde donde regresan a la orilla de partida. En el viaje de regreso los botes se cruzan nuevamente, en esta ocasión a 400 metros de la orilla opuesta. Se pregunta: ¿Qué tan ancho es el río?

Pautas para resolver

Estando claro el objetivo, conocer el ancho del río, debemos trazar un plan para alcanzarlo. Para esto conviene preguntarnos cómo podemos relacionar los datos que tenemos con el objetivo. En este caso sería relacionar el recorrido de los botes con el ancho del río. Adicionalmente sería útil realizar un croquis de la situación.

Resolución

Llamemos norte y sur a las orillas del río. Supongamos que el primer cruce se produce a 700 metros de la orilla Norte. En esa instancia entre los dos botes habrán recorrido el ancho del río. Al alcanzar la orilla opuesta, entre los dos botes habrán recorrido dos veces el ancho del río. Y cuando se vuelvan a cruzar, a 400 metros de la orilla sur, entre los dos botes habrán recorrido tres veces el ancho del río. Como los botes avanzan a velocidad constante se deduce que, al producirse este segundo cruce, el bote que partió de la orilla norte habrá recorrido 700×3, es decir, 2100 metros y esto es el ancho del río más 400 metros. Se puede concluir entonces que el ancho del río es de 2100 - 400 metros, es decir 1700 metros.

Verificación

El bote que partió de la orilla sur recorrió al momento del primer cruce 1700 - 700 metros = 1000 metros

Al momento del segundo cruce, entonces, recorrió 3000 metros. Por lo que para completar el regreso a la orilla de partida le deben faltar 1700 * 2 - 3000 = 400 metros. Resultado que coincide con los datos planteados.

Una segunda verificación gráfica nos permite ver un esquema de los desplazamientos de las naves y los puntos de cruce en el tiempo. En el diagrama que sigue se ha trabajado con una escala gráfica apropiada para el tamaño de hoja que permite verificar el resultado obtenido.

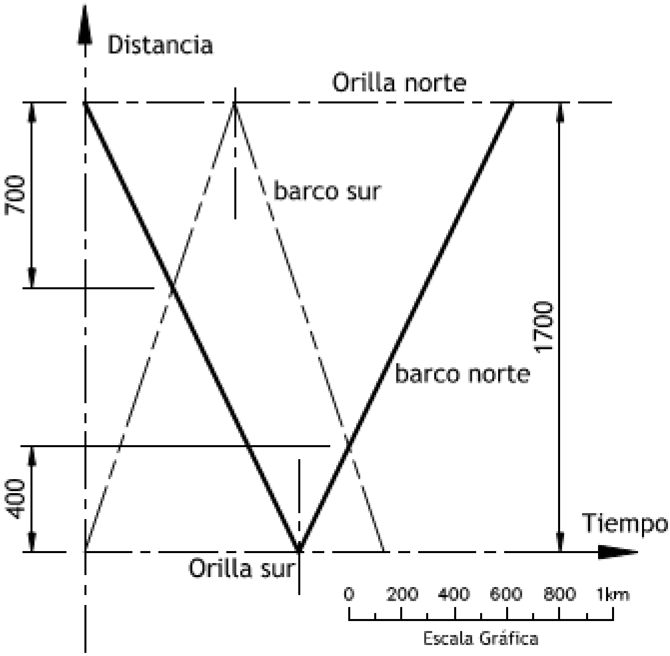


Figura 44. Cruce de botes

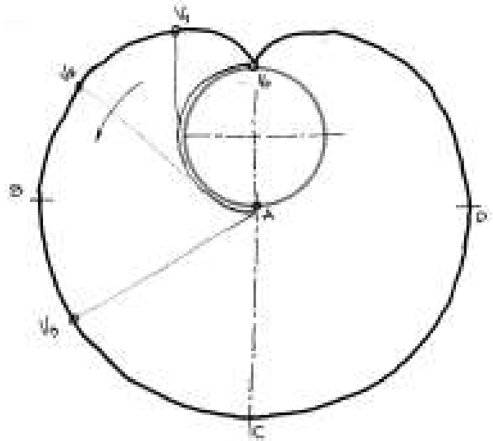
Problema 11. La vaca y el silo

El siguiente ejemplo, tomado de “Cálculo de Una Variable” de James Stewart” muestra una interesante y potente aplicación de cálculo gráfico, en este caso un cálculo de superficie que el libro propone resolver mediante integrales y nosotros vamos a resolver gráficamente.

El problema dice así: En un punto de la periferia de un silo de 10 m de diámetro está atada una cuerda de longitud igual al semiperímetro del silo. En el otro extremo de la cuerda está atada una vaca. Se pide calcular el área de pastura a la que puede acceder la vaca.

Pautas para resolver

Al desenrollar la soga, el extremo donde está el animal describe una curva compuesta como la graficada en el croquis.



Siendo el silo la circunferencia y la soga es la línea atada al punto A, entonces la vaca se puede desplazar por la curva V_0, V_1, V_2, B, V_3, C, D y llegando a V_0 al completar la vuelta.

Desde V_0 hasta B la curva es una evolvente de círculo, B-C-D es un arco de circunferencia y desde D hasta V_0 se tiene una evolvente simétrica de la primera. El paso siguiente será desarrollar una estrategia para calcular el área donde podrá pastar la vaquita.

Resolución

Este problema se resuelve fácilmente aprovechando las utilidades del software CAD. Comenzamos trazando la circunferencia representativa del silo con centro en O y diámetro AV. A continuación el arco de evolvente que describe el extremo de la soga desde V a B.

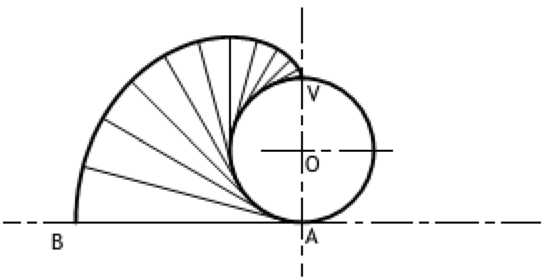


Figura 45. Evolvente de círculo por extremo de la soga

Luego la semicircunferencia BCD y finalmente la evolvente de circunferencia que va desde D hasta V_0.

Creamos una región con el área encerrada entre el silo y la curva descripta por la soga, es decir, el área donde come la vaca. Consultando el software obtenemos que el área alcanzada por la vaca que es 645.9658 m^2.

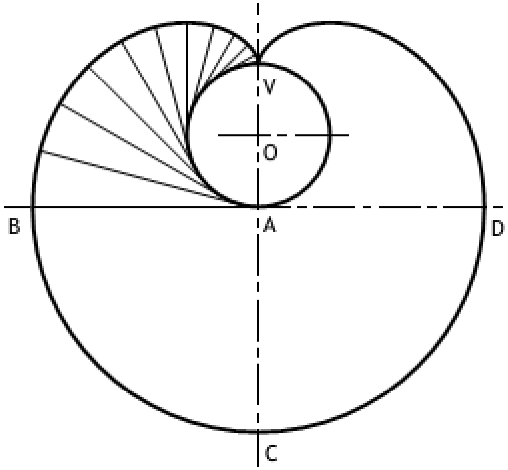
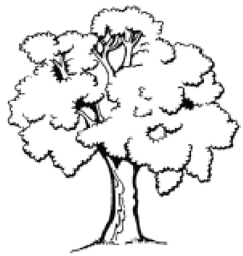


Figura 46. Recorrido de la soga

Problema 12. Geometría y forestación

Disponemos de ocho retoños para plantar en un terreno cuadrado.



Podemos hacerlo colocando los árboles, tanto en los bordes como en el interior del cuadrado tal como se muestra en la figura 47. Sin embargo esto no es lo mejor ya que cuando crezcan su copas van a chocar y quitarse el sol mutuamente. El ideal es que los árboles queden tan separados como sea posible.

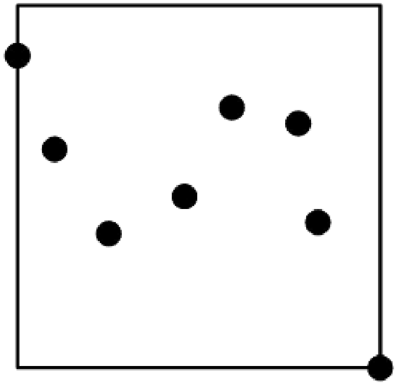


Figura 47. Una forma posible de disponer los árboles

Y ahora el desafío: encontrar una mejor solución donde los árboles estén separados por la mayor distancia posible.

Pautas para resolver

Un problema similar a este pero más fácil de resolver sería el caso de tener que ubicar dos árboles. Los colocaríamos en vértices opuestos del cuadrado. No hace falta demostrar nada; hemos logrado la mayor separación posible.

También sería muy simple de resolver el caso de cuatro árboles ubicándolos en los vértices.

El caso de tres árboles se resuelve fácilmente observando los resultados del Problema 5.

Son bastante evidentes las soluciones para los casos de cinco y nueve árboles; esta última va en la figura 48.

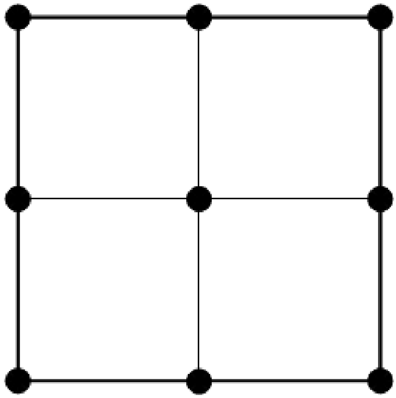


Figura 48. Nueve árboles con la máxima separación posible

Desde este caso es bastante sencillo pasar al de ocho que es nuestro problema.

Solución

Desde un plano con nueve árboles podemos observar que quitando el central y a medida que se desplazan hacia el centro los señaladores que están en los puntos medios de los lados por una parte aumenta la separación entre estos y los que están en los vértices y por otra parte disminuye la distancia existente entre los señaladores que movemos. Habremos alcanzado la solución óptima cuando la distancia entre los árboles que se desplazan sea igual a la distancia entre ellos y los dos vértices más cercanos; esto que el árbol ubicado en el vértice del cuadrado forme un triángulo equilátero con los dos árboles más cercanos.

La próxima figura muestra la solución alcanzada.

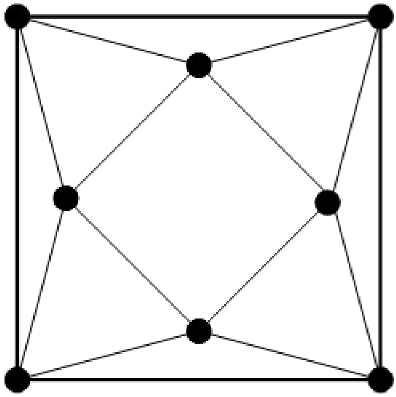


Figura 49. Ocho árboles con la mayor separación posible.

Problema 13. Prestidigitación geométrica. 80 = 81?

Veamos ahora un problema propio de un gran ilusionista. Lo voy a guiar para que usted pueda realizar un pase casi mágico. Es muy simple; solo debe seguir las instrucciones que siguen.

Partimos de un cuadrado de 9 unidades de lado, 81 unidades cuadradas de superficie. A fin de comprobar el proceso puede recortar la figura sobre una cartulina o cartón. Si quiere tener máxima exactitud adopte una unidad de medida grande; tan grande como para que 9 x 9 unidades quepan en su cartulina.

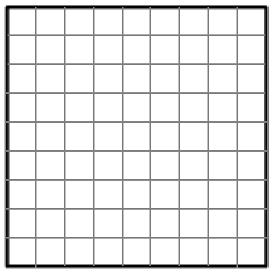


Figura 50. Cuadrado de 9 x 9 unidades

Haremos un corte que vaya desde un punto ubicado sobre un lado y a una unidad de distancia de un vértice hacia el vértice opuesto como se muestra en la figura 51.

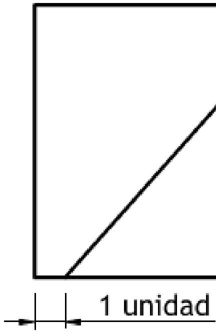


Figura 51. Cuadrado de 9 x 9 unidades con el corte

Seguidamente desplazamos la pieza superior izquierda manteniendo contacto con la otra pieza hasta que el desplazamiento vertical haya sido exactamente una unidad. Se alcanza una situación similar a la del lado izquierdo de la figura 52. Sobresaldrá una partecita del cuadrado original que cortaremos para luego llevarla al lugar faltante abajo y a la izquierda; tendremos finalmente una disposición de partes como la presentada a la derecha de la misma figura.

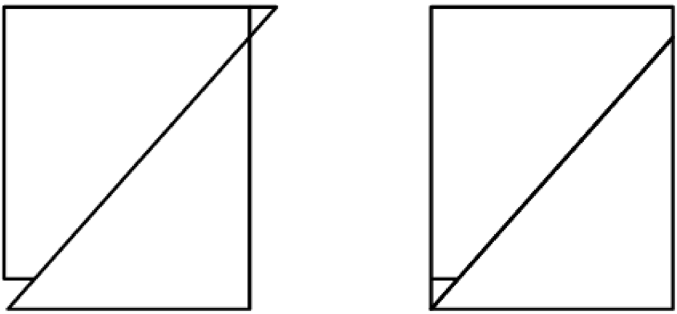


Figura 52. Desplazamiento y reacomodación de las partes

Si ahora revisa y mide se encontrará con un rectángulo de 8 x 10 unidades, esto es 80 unidades cuadradas de superficie.

¿Qué ha sucedido? ¿Donde está la unidad que falta? ¿Puede encontrar una explicación?

Pautas para resolver

La magia no existe. El Mago Merlín y Harry Potter tienen sus poderes limitados a la ficción. En el mundo real debemos hablar de ilusiones y trucos. Copperfield ilusiona aprovechándose de sus facultades histriónicas para distraer y engañar el cerebro de los espectadores.

Ahora usted observe y mida cuidadosamente la figura resultante. Debe haber alguna falla.

Explicación

Dimos por sentado que al mover las piezas a lo largo del corte los desplazamientos vertical y horizontal serían iguales. Pero esta suposición solo es válida para un corte a 45°.

Si ha sido prolijo en los cortes notará que la parte móvil del cuadrado se ha desplazado una unidad hacia arriba y menos de una unidad hacia la derecha.

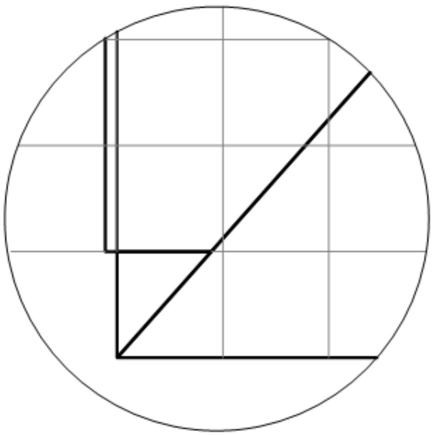


Figura 53. Detalle del vértice inferior de la figura compuesta.

El lado izquierdo de la pieza superior no queda alineado con del vértice inferior izquierdo de la pieza inferior. Sobresale 0,1111 unidades. Multiplicando este valor por las nueve unidades de altura se tiene la unidad cuadrada faltante.

Problema 14. Triángulo inscripto de área máxima

Propongo ahora un problema cuyas conclusiones aprovecharemos más adelante. Se quiere saber cuál es el triángulo de mayor área inscripto en una circunferencia. ¿Será un triángulo acutángulo, obtusángulo? ¿Tal vez debiera ser isósceles?

Pautas para resolver

Comience trazando una circunferencia y sobre ella imagine cual puede ser el triángulo de área máxima. Trace una secante cualquiera A-C que intente ser uno de los lados de ese triángulo. Busque el triángulo de mayor área que tenga a ese triángulo como lado. Para facilitar la visualización es conveniente que la secante sea horizontal.

Comparemos ahora las áreas de los triángulos que se obtienen tomando como tercer vértice del triángulo un punto cualquiera B y tomando el punto P, más distante del lado AC.

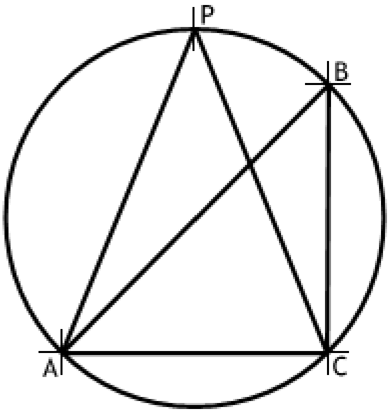


Figura 54. Comparación de triángulos inscriptos en circunferencia

Evidentemente, eligiendo P tenemos un triángulo que resulta ser isósceles y es de mayor altura. Le sugiero que ahora intente seguir por sí mismo el proceso de optimización.

Resolución

La imagen deja en claro que, dado un lado AB del triángulo inscripto, siendo el triángulo isósceles ABP el de mayor altura, será el de mayor área de todos aquellos con un lado igual a AC. Se infiere entonces que mientras existan dos lados desiguales en un triángulo siempre será posible construir otro de área mayor. Se concluye entonces que el triángulo que no tenga lados desiguales será el de mayor área posible, es decir, el equilátero.

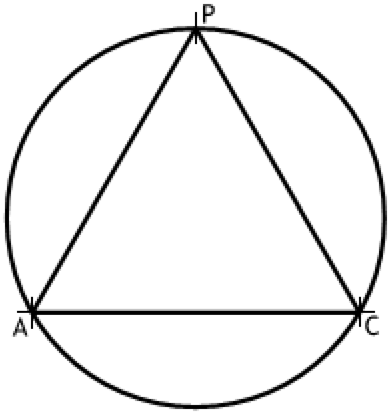


Figura 55. Triángulo equilátero inscripto, de área máxima

Problema 15. Triángulo circunscripto de área mínima

Del mismo tipo que el problema anterior pero esta vez se quiere saber ¿Cuál es el triángulo de menor área circunscripto a una circunferencia?

Pautas para resolver

Veamos la figura 56. Desde un punto 'A', externo a una circunferencia tracemos dos tangentes para obtener un triángulo como el A-B-C trazando la tangente por el punto 'T'.

Sigamos un razonamiento indirecto semejante al anterior.

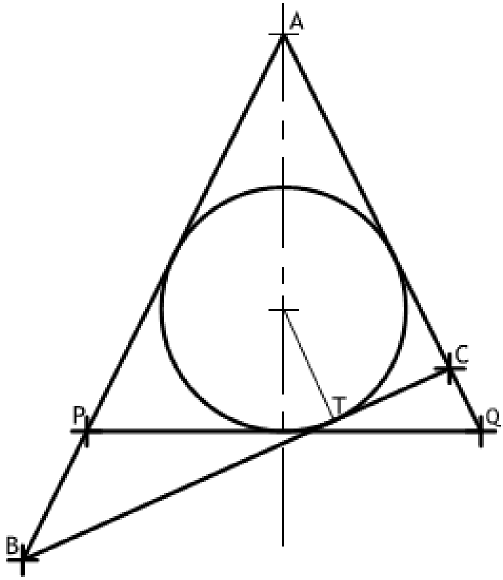


Figura 56. Triángulo circunscripto de área mínima

El triángulo circunscripto ABC con el punto de tangencia T variable para el lado BC tiene área mínima cuando es isósceles. En efecto, si los lados AB y AC son desiguales, será posible encontrar un triángulo isósceles APQ de menor área. Y esto sucederá siempre que haya dos lados desiguales. Así pues, se concluye que el triángulo equilátero circunscripto es el de menor área.

Disecciones planas

Trataremos un grupo de problemas que consisten en disecar una figura plana de acuerdo con algún criterio.

Problema 16. La solución está en la pregunta

Dividir la figura en dos partes iguales. La línea de división sigue el cuadriculado. Las figuras resultantes pueden estar desplazadas, giradas y/o rebatidas una de otra.

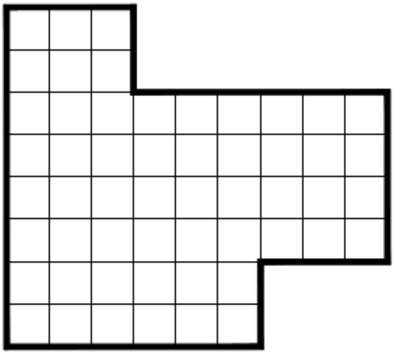


Figura 57. Disección: la solución está en la pregunta

Pautas para resolver

Esta clase de problemas requieren de una buena cuota de observación e imaginación. No podemos establecer un camino algorítmico. Tendremos que buscar la solución mediante prueba y error. Siendo así resulta recomendable establecer algunos criterios orientativos de la búsqueda.

Comencemos por las observaciones. La disección debe seguir, en parte al menos, algunas de las líneas externas de la figura; ya sean iguales o simétricas.

La mayor de las medidas de la figura suministrada podría ser el ancho solo en caso de la figura dada tenga alguna clase de simetría. No siendo así tendremos que pensar en la existencia de rotaciones o simetrías.

Solución

Efectivamente, la solución es un signo de pregunta y su simétrico ubicados adecuadamente como se muestra en figura 58.

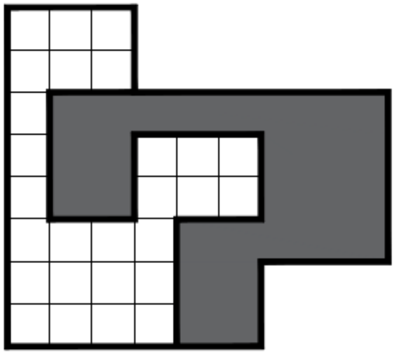


Figura 58. ¡La solución está en la pregunta!

Problema 17. El campo familiar

Un campesino quiere repartir un campo que posee entre sus cuatro hijos. Como estos se celan mutuamente y no admiten diferencias el hombre debe ser muy cuidadoso al hacer el reparto. Por eso es que decide dividir el campo en cuatro partes absolutamente congruentes. Siendo el terreno de la forma mostrada en el plano que sigue debemos sugerirle al hombre como hacer la división.

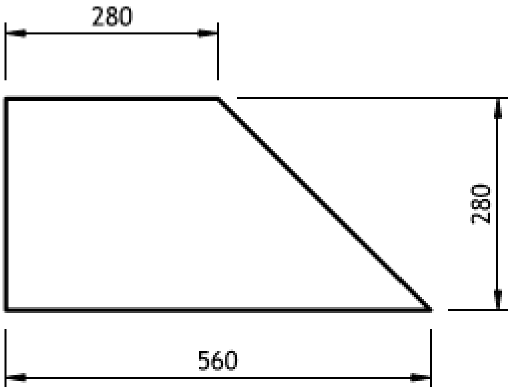


Figura 59. El campo familiar

Pautas para resolver

En este caso siguen siendo válidas las mismas pautas del problema anterior, solo que ahora hay que dividir en cuatro. Hay que observar también la particular relación entre las dimensiones del campo.

Resolución

El ángulo en la parte inferior derecha es una buena ayuda para comenzar el tanteo de formas posibles. El campo familiar ya dividido se muestra en figura 60.

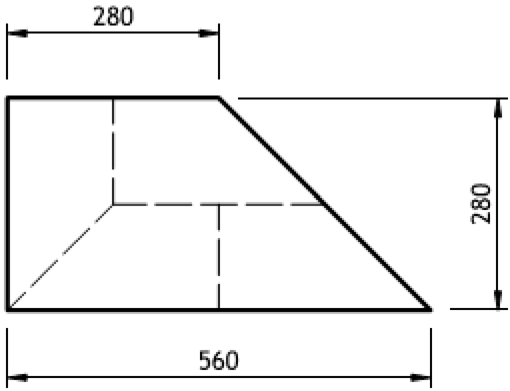


Figura 60. El campo familiar dividido

Problema 18. En el taller de herrería

En cierta oportunidad solicitó asesoramiento un herrero que dispone de una chapa perfectamente cuadrada de 1 m de lado con la cual debe componer diez cuadrados iguales utilizando la chapa en su totalidad. A fin de reducir el tiempo de ejecución habrá de realizar la menor cantidad de cortes rectos posibles para luego soldarlos dándole la forma requerida a las piezas. ¿Qué instrucciones debemos darle?

Pautas para resolver

Es inmediato deducir que los cuadrados resultantes serán de 0,1 m^2 de superficie. El problema es que el lado de los mismos va a ser un número irracional y por lo tanto debemos ser muy cuidadosos al disponer la forma de cortar la chapa.

Para simplificar las cuentas vamos a expresar todas las medidas en dm. Así el cuadrado original tendrá 10 dm de lado y su superficie es de 100 dm^2.

Sería muy simple el problema si tuviésemos que dividir en nueve partes iguales. El lado de los cuadrados resultantes medirá $10/3$ de dm y se podrá disponer como sigue.

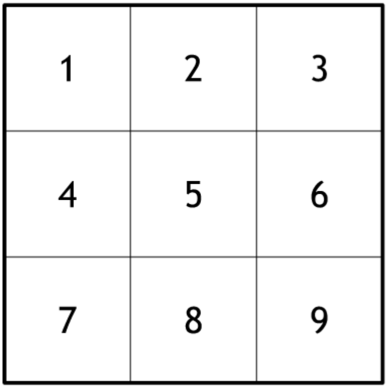


Figura 61. La chapa cuadrada dividida en nueve partes iguales

Pero nuestro caso es diferente. El lado del cuadrado buscado será $l = \sqrt[2]{10}$, o sea algo menor que 1/3. La pregunta que se impone ahora es ¿habrá alguna forma de trazar la chapa para conseguir el lado exacto?

Resolución

Siempre se puede conseguir la representación de un número natural sumando cuadrados; en nuestro caso sería $10 = 1^2 + 3^2$. O sea que si construyo un triángulo rectángulo con catetos iguales a 1 y 3, el teorema de Pitágoras me dice que la hipotenusa va a tener la longitud pretendida: $\sqrt{10}$.

En el trazado de figura 62 puede verse el corte propuesto por líneas de trazos con los que se divide la figura inicial en cuadrados o partes de ellos. Vamos a verificar que el lado de esos cuadrados tenga la longitud requerida.

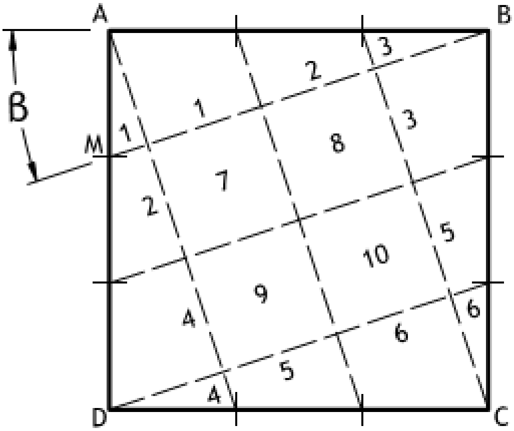


Figura 62. División del cuadrado para componer diez cuadrados iguales

El triángulo rectángulo M-A-B de catetos 10 y 10/3 la hipotenusa BM mide

$$h = \sqrt{10^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{10}{3} \times \sqrt{10}$$

La relación entre el cateto mayor y la hipotenusa, seno del ángulo comprendido, es

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{3}{10} \times \sqrt{10}$$

Entonces el lado de un cuadrado chico, como por ejemplo el 8, medirá

$$l = \frac{10}{3} \times \operatorname{sen} \beta = \frac{10}{3} \times \frac{3}{10} \times \sqrt{10} = \sqrt{10}$$

O sea que los cuadrados que podemos formar cumplen las condiciones. Solo nos queda cortar por las líneas de trazos y con las piezas que no son cuadrados completos, considerar las que tienen el mismo número y unirlas.

Capítulo 4
Los objetos tridimensionales

Uno de los requerimientos que se le planteó a la representación gráfica fue la necesidad de explicar en planos, es decir en dos dimensiones, la forma de objetos tridimensionales. La respuesta fue la creación de diferentes sistemas de representación.

La pregunta que surge de inmediato es ¿por qué varios sistemas? ¿No será posible un sistema lo suficientemente bueno como para resolver todos los problemas? Veamos la situación. Vamos a representar en dos dimensiones objetos que tienen tres dimensiones. Esto impone algunas restricciones a la representación y el resultado es que no se puede conseguir todo lo bueno en un mismo sistema. El sistema que es bueno para una finalidad tiene falencias para otro objetivo.

Representar 3D en el plano

Supongamos tener un punto fijo en el espacio, una superficie plana y una recta que pasa por el punto dado. Llamaremos plano de proyección a la superficie plana y rayo proyectante a la recta que pasa por el punto. La intersección del rayo proyectante con el plano de proyección es la proyección del punto dado.

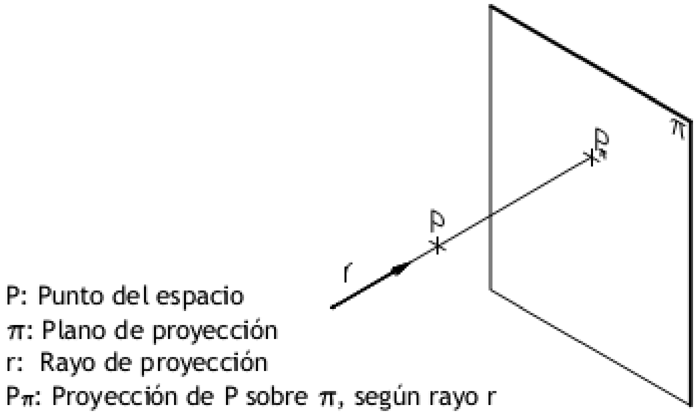


Figura 63. Concepto de proyección

Llamaremos proyección de una figura a la figura resultante de proyectar los puntos de la figura dada sobre un plano. Según la dirección que lleven los rayos proyectantes con respecto al plano de proyección se tendrán diferentes sistemas.

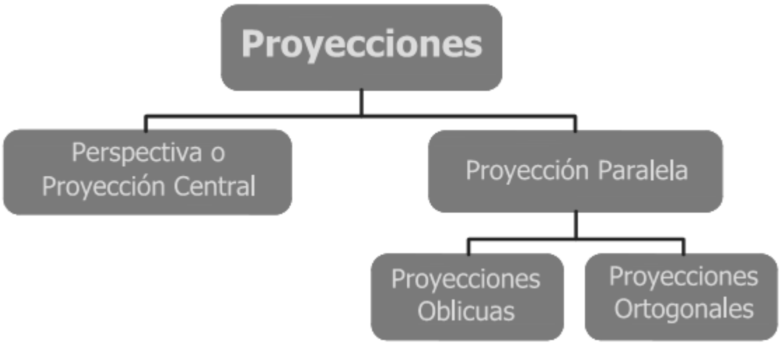


Figura 64. Esquema de los diferentes sistemas de proyección

Distinguiremos según los rayos proyectantes partan de un punto, proyección central, o sean paralelos a una dirección determinada, proyección paralela. A su vez en las proyecciones paralelas distinguimos según que la dirección de proyección sea oblicua o perpendicular respecto al plano de proyección; tendremos proyecciones oblicuas o proyecciones ortogonales respectivamente.

Proyección central

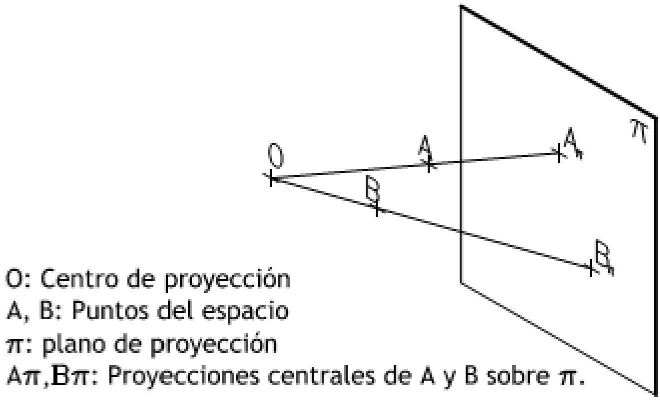


Figura 65. Esquema de la proyección central

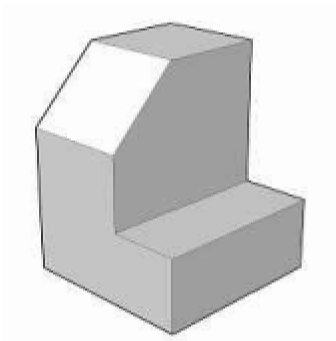


Figura 66. Resultado de una proyección central

Proyección paralela oblicua

En el sistema de proyección oblicua los rayos proyectantes son paralelos entre sí y oblicuos al plano de proyección. La proyección de un punto se obtiene como intersección de un rayo proyectante con el plano de proyección.

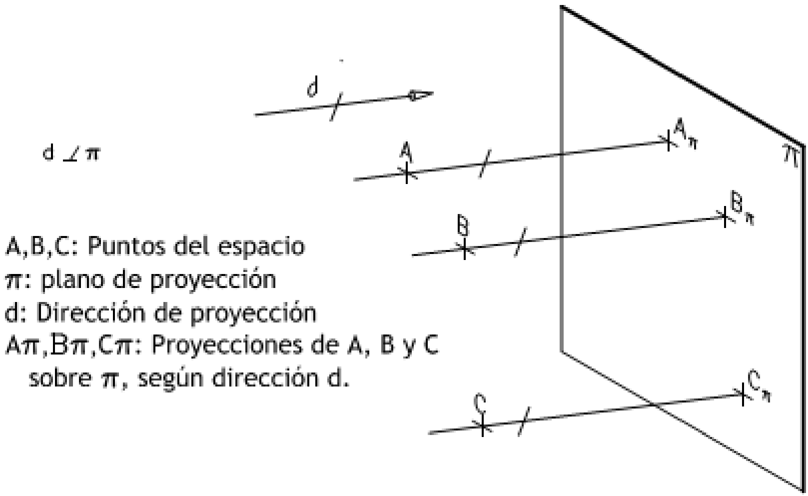


Figura 67. Proyección paralela oblicua

Se consigue un resultado como el mostrado en la figura 68. Este ejemplo particular se conoce como perspectiva caballera.

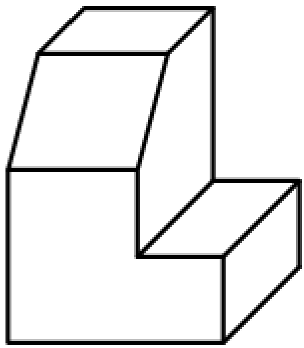


Figura 68. Ejemplo de proyección oblicua

Proyección paralela ortogonal

En el sistema de proyección paralela ortogonal los rayos proyectantes son paralelos entre sí y perpendiculares al plano de proyección. La proyección de un punto se obtiene como intersección del rayo proyectante que pasa por el punto con el plano de proyección.

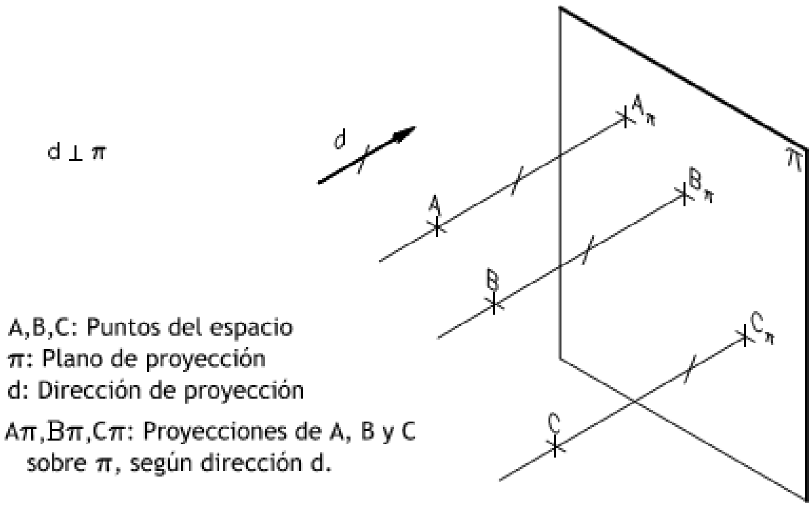


Figura 69. Proyección paralela ortogonal

Esta forma de proyección da lugar al sistema diédrico multiplanar que da fundamento a la confección de planos y a las axonometrías ortogonales.

La descripción completa de la forma de un objeto requiere medir y aplicar medidas. Para conseguirlo las caras principales del objeto a representar se colocan de frente al observador o, lo que es lo mismo, paralelas al plano de proyección. En estas condiciones no será posible apreciar la dimensión perpendicular a la cara representada. Es por esto que para conseguir la representación completa del objeto se utiliza un sistema de planos de proyección mutuamente perpendiculares entre sí al que llamamos sistema diédrico multiplanar. De esta manera obtenemos las vistas del objeto.

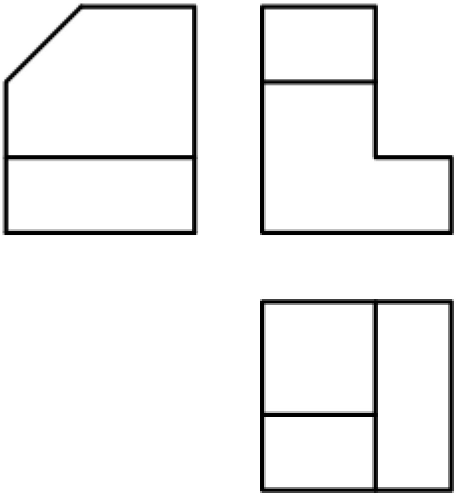


Figura 70. Vistas de un objeto

Si ubicamos el objeto a representar de manera tal que se puedan apreciar simultáneamente tres caras que sean perpendiculares entre sí, al proyectarlo conseguiremos un dibujo ilustrativo conocido como axonometría. Desarrollaremos una aproximación a los mismos.

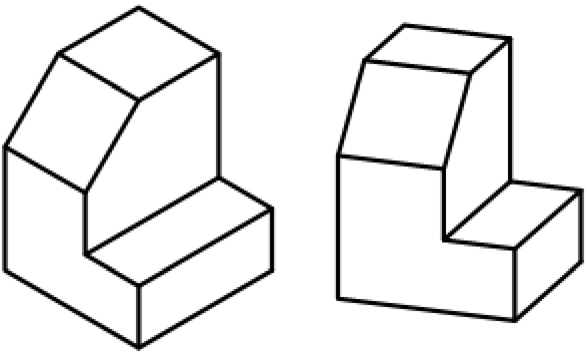


Figura 71. Axonometrías

Desarrollaremos una aproximación a estos sistemas de representación.

Proyección de segmentos

Un segmento de recta se proyecta como segmento cuya longitud depende de la posición que tenga respecto del plano de proyección.

Posición del segmento respecto del plano de proyección	Resultado obtenido
Paralelo	Segmento de igual longitud al segmento dado; en verdadera magnitud.
Oblicuo	Segmento de menor longitud que el segmento dado.
Perpendicular	Un punto

Segmentos paralelos en el espacio resultaran paralelos en sus proyecciones y sus longitudes se reducen en la misma proporción.

Ángulo recta plano

Se determina el ángulo formado por una recta con un plano midiendo el ángulo formado por la recta con su proyección ortogonal sobre el plano. En la figura que sigue mostramos que se puede llegar al mismo resultado midiendo el ángulo formado por el segmento dado con una paralela al plano que pase por uno de sus extremos.

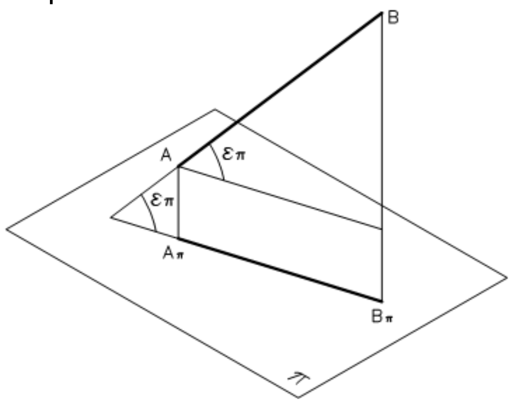


Figura 72. Medición del ángulo recta plano

Proyección de una figura plana

¿Qué sucede cuando proyectamos una figura plana?

Según la posición que tenga el plano al que pertenece la figura dada con respecto al plano de proyección se tendrá como resultado uno de los siguientes:

Posición relativa del plano dado respecto del plano de proyección	Resultado obtenido
Paralelo	Figura igual a la figura dada
Oblicuo	Figura de la misma configuración pero menor superficie
Perpendicular	Una línea

Área de figura plana proyectada

Una figura contenida en un plano oblicuo al plano de proyección se proyecta como una figura similar y de área igual al área de la figura original multiplicada por el coseno del ángulo comprendido entre el plano de la figura y el plano de proyección.

Para demostrarlo consideremos el diedro formado por el plano que contiene a la figura plana y el plano de proyección. Comenzaremos demostrando para un triángulo que tenga un lado paralelo a la arista del diedro formado por el plano dado y el plano de proyección; la altura del triángulo se proyecta con una medida igual a la altura original multiplicada por el coseno del ángulo diedro.

Si el triángulo no tiene ningún lado paralelo a la arista del diedro, lo dividimos en dos triángulos que sí cumplan esa condición. Podemos extender el razonamiento para toda figura poligonal; bastará descomponerla en triángulos para demostrar. Con lo que podemos afirmar que cualquier polígono contenido en un plano oblicuo se proyecta como una figura de la misma configuración y cuya superficie es igual a la superficie del polígono original multiplicada por el coseno del ángulo comprendido.

Para completar ideas consideremos una figura plana de contornos curvos. Podemos visualizar en forma intuitiva, aunque no rigurosa, que la figura puede ser aproximada por un polígono de lados tan pequeños como se quiera y en el límite, esa figura plana de contornos curvos tiene un área igual al área del polígono de lados muy pequeños. Por extensión, entonces, el área de la figura proyectada será igual al área de la figura original multiplicada por el coseno del ángulo diedro.

Generación de proyecciones

La generación de las proyecciones de objetos con la finalidad de confeccionar un plano u obtener un dibujo ilustrativo se basa, tradicionalmente, en la geometría descriptiva y desde comienzo de este siglo en los sistemas de modelado tridimensional.

Direcciones del espacio: coordenadas

Supongamos vivir en un barrio de zona rural, donde las calles no están identificadas. Para que alguien encuentre nuestra casa habrá que orientarlo de alguna forma, por ejemplo: suministrándole las coordenadas para colocar en un GPS o haciendo un planito de la zona, es decir una representación gráfica.

De la misma forma, cuando se quiera ubicar algún elemento geométrico en el plano o en el espacio debemos suministrar un conjunto de datos que llamaremos coordenadas. Los datos suministrados se aplican considerando una terna de ejes de referencia XYZ. Los ejes coordenados son perpendiculares entre sí y se disponen siguiendo lo que llamamos la ‘regla de la mano derecha’; ésta dice que cuando el pulgar de esa mano apunta hacia donde crecen los valores del eje X, el dedo índice apunta hacia donde crecen los valores del eje ‘Y’, el dedo medio apuntará en la dirección positiva del eje ‘Z’.

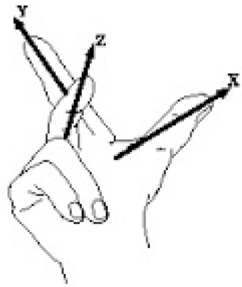


Figura 73. Regla de la mano derecha

Disponemos de tres sistemas de coordenadas: Coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Coordenadas Cartesianas

Las coordenadas cartesianas especifican la posición de un punto mediante las distancias paralelas a los ejes coordenados. Un ejemplo: en la figura siguiente se ha representado el punto de coordenadas (4, 3, 5)

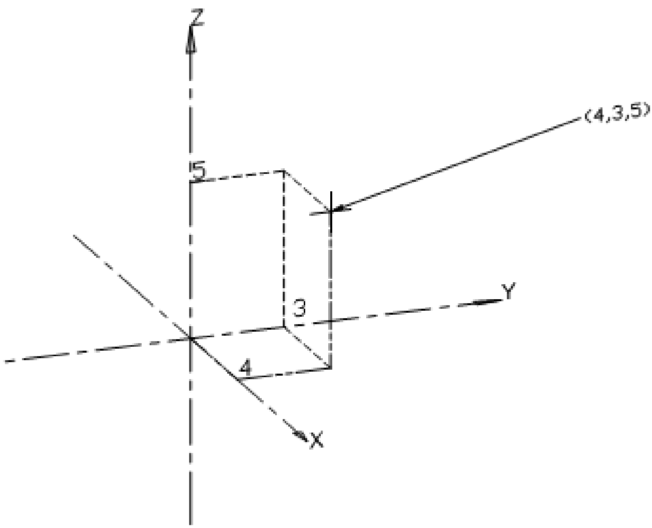


Figura 74. Punto en coordenadas cartesianas

Podemos pensar que para ubicar el punto procedemos de la siguiente forma:

- A partir del origen de coordenadas, punto (0,0,0) nos desplazamos a lo largo del eje ‘X’ según indica la primera coordenada, llegando al punto (4,0,0)
- Desde el punto alcanzado nos desplazamos a lo largo del eje ‘Y’ según indica la segunda coordenada, llegando al punto (4,3,0)
- Finalmente nos desplazamos paralelamente al eje ‘Z’ según indica la tercera coordenada, alcanzando el punto especificado como (4,3,5)

Las coordenadas cartesianas permiten trabajar en el plano XY especificando los primeros dos parámetros.

Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas especifican la posición de un punto mediante una distancia al origen de coordenadas, un ángulo en el plano XY y una distancia paralela al eje Z.

En representación gráfica cuando una coordenada toma valor angular, utilizaremos un corchete angular como separador de parámetros. Un ejemplo: en la figura siguiente se ha representado el punto de coordenadas (6<30°,5)

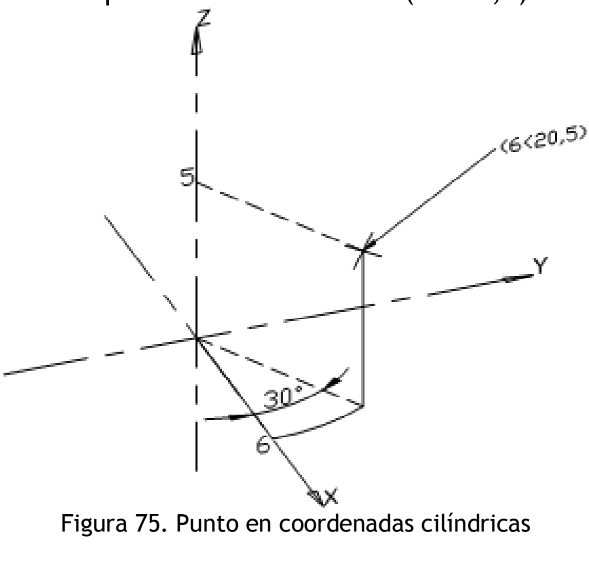


Figura 75. Punto en coordenadas cilíndricas

Para ubicar el punto especificado procedemos de la siguiente forma:

- A partir del origen de coordenadas, punto (0,0,0) nos desplazamos a lo largo del eje ‘X’ según indica la primera coordenada, llegando al punto (6,0,0)
- Desde el punto alcanzado giramos alrededor del origen de coordenadas, manteniéndonos en el plano XY, un ángulo igual al valor de la segunda coordenada, llegando al punto (6<30°)
- Finalmente nos desplazamos paralelamente al eje ‘Z’ según indica la tercera coordenada, alcanzando el punto especificado como (6<30°,5)

El nombre de coordenadas cilíndricas se debe a que una vez especificado el valor de la primera coordenada el punto que se especifica pertenecerá indefectiblemente a una superficie cilíndrica de radio igual al valor de la primera coordenada.

Las coordenadas cilíndricas permiten trabajar en el plano XY especificando los primeros dos parámetros; en este caso se las conoce como coordenadas polares.

Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas especifican una ubicación mediante una distancia R a partir del origen de coordenadas, un ángulo α desde el eje X en el plano XY y un ángulo β desde el plano XY.

Una vez definido el valor de la primera coordenada el punto que se especifica pertenecerá indefectiblemente a una superficie esférica de radio igual al valor de la primera coordenada.

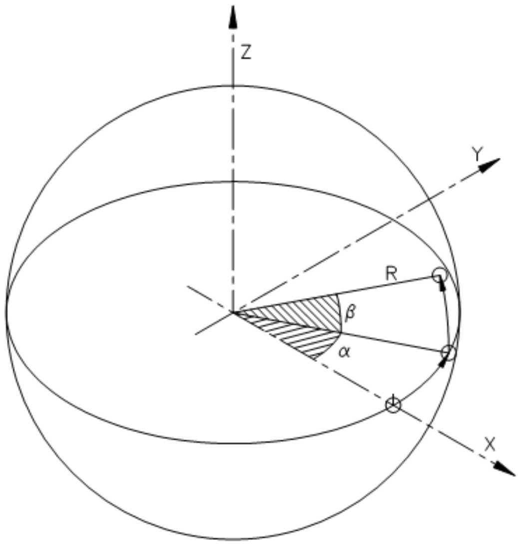


Figura 76. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas, al igual que las coordenadas cilíndricas, permiten trabajar en el plano XY especificando los primeros dos parámetros; se tienen entonces coordenadas polares.

De Coordenadas Esféricas a Coordenadas Geográficas

Las coordenadas geográficas son un sistema de referencia que utiliza dos coordenadas angulares para especificar un punto de la superficie terrestre. Estas dos coordenadas angulares forman parte de un sistema de coordenadas esféricas cuyo origen coincide con el centro de la tierra. La distancia que se especifica en las coordenadas esféricas en este caso no es necesaria porque se entiende que el punto estará sobre la superficie terrestre.

El eje de rotación terrestre coincide con el eje 'Z' del sistema de coordenadas.

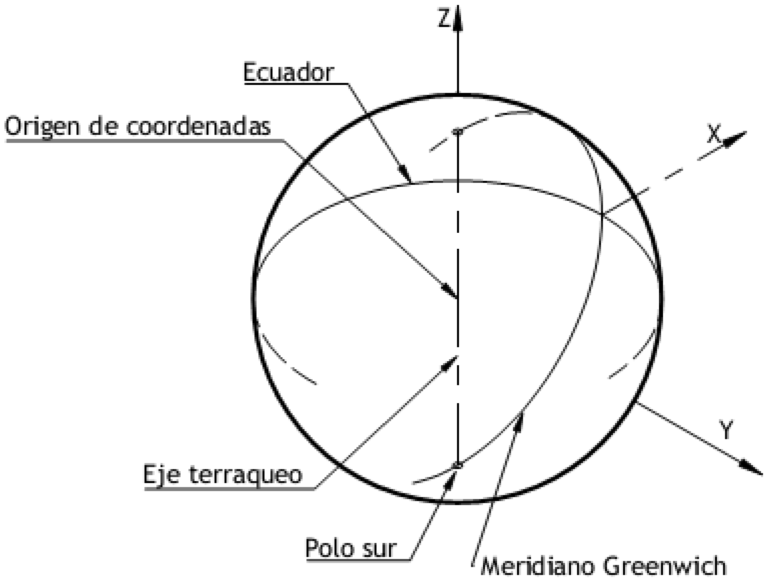


Figura 77. Sistema de Coordenadas Geográficas

Paralelos

Se denominan paralelos a las circunferencias resultantes de la intersección de la superficie terrestre con planos perpendiculares al eje terrestre.

Para alcanzar cualquier punto perteneciente a un paralelo habrá que girar igual ángulo desde el plano 'XY'.

La intersección del plano XY con la superficie terrestre da lugar a la circunferencia de Ecuador. Es el paralelo 0°.

El ángulo correspondiente a un paralelo siempre tiene un valor comprendido entre 0° y 90°. 0° corresponde al Ecuador. 90° corresponde a los polos. A los puntos comprendidos entre el Ecuador y el Polo Norte se les asigna latitud norte o se pueden especificar con valores positivos. A los puntos comprendidos entre el Ecuador y el Polo Sur se les asigna latitud sur o se pueden especificar con valores negativos.

Meridianos

Los meridianos son semicircunferencias con extremos en los polos norte y sur.

Para alcanzar cualquier punto perteneciente a un meridiano habrá que comenzar por girar el ángulo indicado en el plano 'XY'.

El eje 'X', a partir del cual se miden los giros en el plano 'XY' pasa por un meridiano particular identificado como Meridiano de Greenwich.

Los ángulos correspondientes a un meridiano pueden tomar valores comprendidos entre 0° y 180°. Siguiendo la regla de la mano derecha, observamos el giro desde el lado positivo del eje 'Z' y se les asigna longitud Este o positiva a los puntos encontrados girando en sentido anti-horario. A los puntos encontrados cuando se realiza el giro horario se les asigna longitud Oeste o negativa.

Problemas

A continuación presentamos problemas vinculados a la representación de objetos tridimensionales.

Problema 19. Minimizar la suma de distancias

Del libro "Geometría Analítica con Software", Katz R., Sabatinelli P. extraemos un problema que sirve para ilustrar como la solución de un problema del mismo tipo pero más simple nos ayuda a resolver.

Hallar las coordenadas de un punto P, del plano de ecuación $2x - 3y + 3z - 17 = 0$, tal que la suma de las distancias a los puntos A (3,-4,7) y B (5,-14,17) sea mínima.

Pautas para resolver

Llamando α al plano definido por la ecuación dada analizamos los casos posibles.

- Los dos puntos pertenecen al plano alfa. Cualquier punto del segmento que une los puntos dados sería solución.

- Uno de los puntos pertenece al Plano α. El punto dado, A ó B, que pertenece al plano α, es solución.
- Los puntos dados están en distintos semiespacios respecto del plano α. Como la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta, entonces, la intersección del segmento A-B con el plano α será el punto P buscado ya que desde cualquier otro punto distinto de P que tomemos la suma de sus distancia a los puntos dados será mayor que la distancia entre A y B.
- Los puntos dados están en el mismo semiespacio respecto del plano α. Cuando los puntos están en el mismo semiespacio respecto del plano α tenemos una situación similar a la del Problema 9. pero en este caso en el espacio. La estrategia sería entonces considerar uno de los puntos dados y el simétrico del otro punto respecto del plano α. La solución es similar a la del caso anterior. Y como la distancia desde el punto buscado P al simétrico es igual a la distancia de P al punto dado original ya disponemos de un método para encontrar el punto P.

Resolución

En el libro citado el problema se resuelve analíticamente. Nosotros lo vamos a resolver gráficamente utilizando software CAD 3D del que extraemos algunas imágenes para ilustrar el proceso.

Ubicamos los puntos dados A y B por sus coordenadas cartesianas. Seguidamente ubicaremos tres puntos del plano dado. Elegimos los puntos del plano pertenecientes a los ejes coordenados.

```
X= 8.5000  Y= 0.0000  Z= 0.0000
X= 0.0000  Y= 0.0000  Z= 5.6667
X= 0.0000  Y=-5.6667  Z= 0.0000
```

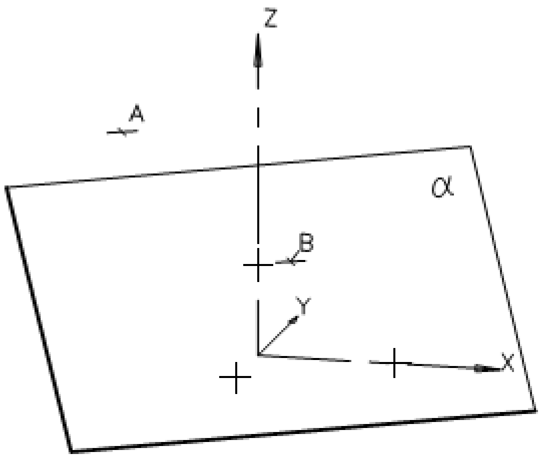


Figura 78. Datos para minimizar la suma de distancias

La figura 78 muestra los datos del problema. Seguidamente adoptamos un nuevo Sistema de Coordenadas Personales (SCP) para que α sea plano de trabajo. Determinamos la intersección de un segmento A-B o su prolongación con el plano α. Este paso nos servirá para determinar en qué caso estamos. Si la intersección está en el segmento A-B estamos en el tercer caso y ya tenemos la solución; caso contrario estamos en el cuarto caso. La intersección buscada se encuentra afuera del segmento A-B, cosa que verificamos por simple observación.

Determinamos el simétrico de uno de los puntos dados respecto del plano α, por ejemplo A al que llamamos A1. Ver figura 79.

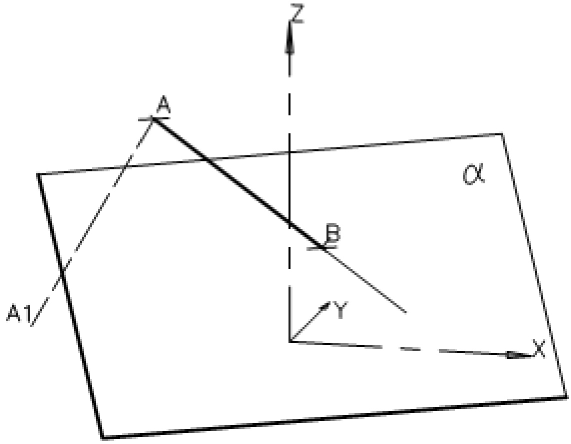


Figura 79. Determinación simétrico de A

Trazamos el segmento A1-B y determinamos su intersección con el plano α. Este será el punto buscado P. Figura 80.

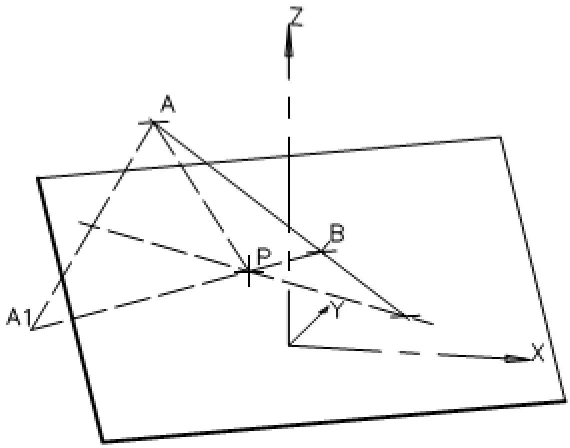


Figura 80. P minimiza la suma de distancias

Coordenadas de P:

$$P(-2.000, -2.000, 5.000)$$

Problema 20. Cuatro ejércitos en el mundo

Supongamos por un momento que en el mundo existen cuatro ejércitos muy beligerantes que se aborrecen mutuamente. Para reducir la posibilidad de conflictos armados una organización mundial de gran ascendiente decide asignarles algún lugar del planeta de forma tal que queden con la mayor separación posible entre ellos. A uno de ellos le asignan el polo sur. A un segundo ejército le asignan un lugar sobre el meridiano de Greenwich cuyo paralelo habrá que determinar. ¿Cómo deberían ubicarse los dos ejércitos restantes?

Simplificación: asumiremos que el mundo es una esfera perfecta. Para especificar la posición de cada ejército lo haremos mediante longitud y latitud.

Pautas para resolver

Sigamos las sugerencias generales para resolver un problema; tratemos de resolver un problema similar pero más fácil, por ejemplo

Dos ejércitos

¿Cómo se resolvería el problema si fuesen dos ejércitos? La respuesta evidente es colocar el segundo ejército en el polo norte.

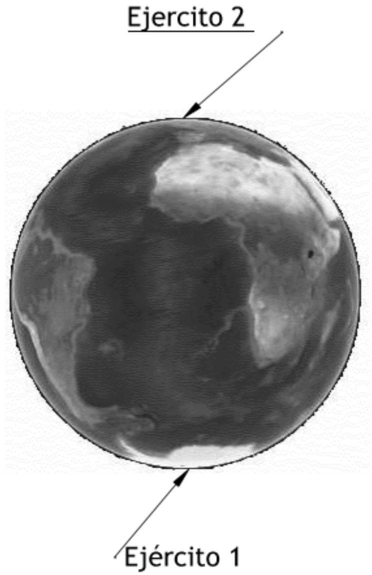


Figura 81. Ubicación para dos ejércitos

Tres ejércitos

¿Y si los ejércitos fuesen tres? Podemos considerar a la posición de los ejércitos como puntos sobre la superficie esférica. Tres puntos determinan un plano. Los puntos comunes a un plano y una superficie esférica dan lugar a una circunferencia. Tres puntos tendrán máxima separación cuando ocupen los vértices de un triángulo equilátero inscripto en la circunferencia. Observemos que los puntos guardan entre sí la misma distancia. Así es que se ubicará un ejército en el polo sur; un segundo ejército en 0° longitud, 30° latitud norte, o sea en el desierto de Sahara y finalmente el tercer ejército en 180° longitud, 30° latitud norte, un islote de las Islas Midway.

Pautas adicionales para resolver

Se complica un poco la resolución cuando nos planteamos el problema con cuatro ejércitos porque en este caso inevitablemente los cuatro puntos buscados no serán coplanarios.

Dejemos de lado, por un momento, la superficie esférica del globo terráqueo. Con la idea de ocupar el menor volumen posible nos preguntamos ¿Cómo se deben ubicar cuatro puntos para que estén todos a la misma distancia uno de otro? La respuesta la dan los cuatro vértices de un tetraedro regular.

Aplicado a nuestro problema debemos conseguir un tetraedro regular inscripto en una esfera.

Resolución

Ya tenemos el plan para resolver:

- modelamos un tetraedro regular; no es de importancia la medida porque vamos medir ángulos;
- le circunscribimos una esfera, el centro de la esfera coincidirá con el centro del tetraedro y finalmente
- medimos las coordenadas de los vértices.

La implementación del plan se puede desarrollar con software de modelado tridimensional.

En definitiva la solución para nuestro problema será asignar a los ejércitos las siguientes ubicaciones:

- Polo sur,
- 0° (meridiano de Greenwich); 19°28'16" latitud norte,
- 60° longitud oeste; 19°28'16" latitud norte y
- 60° longitud este; 19°28'16" latitud norte

La menor distancia entre ejércitos conseguida abarca un ángulo de 109°28'16", o sea aproximadamente 12163 km.

Problema 21. Cinco ejércitos en el mundo

Vamos a extender el problema anterior a una imaginaria situación más grave que la anterior. En el mundo existen cinco ejércitos muy beligerantes que se aborrecen mutuamente. Que ubicación habría que darles para que queden con la mayor separación posible entre ellos y reducir así la posibilidad de conflictos armados.

Se debe comenzar asignando a uno de ellos el polo sur. A un segundo ejército se le asignará un lugar sobre el meridiano de Greenwich cuyo paralelo habrá que determinar. ¿Cómo deberían ubicarse los tres ejércitos restantes?

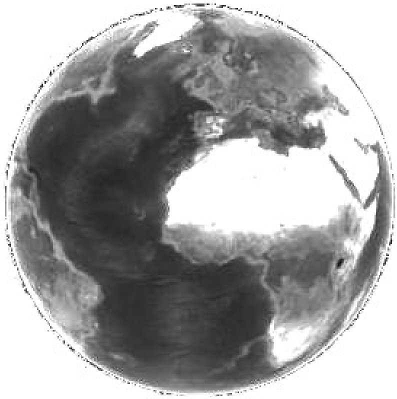


Figura 82. Ubicar cinco ejércitos enemigos en el mundo

Pautas para resolver

Vimos anteriormente como resolver problemas similares aunque con menor cantidad de ejércitos (puntos). Se identificó un concepto del cual podemos inferir que los vértices de un poliedro regular constituirían los puntos buscados. Esto nos daría soluciones para los casos de:

- Seis puntos: Octaedro regular
- Ocho puntos: Hexaedro regular
- Doce puntos: Icosaedro regular
- Veinte puntos: Dodecaedro regular

¿Cuál sería la situación si quitamos un punto a los seis que se corresponden con los vértices de un octaedro regular?

Resolución

Ubicamos un octaedro regular inscripto en la superficie del globo terráqueo con un vértice en el Polo Sur (requerido) y otro en el Polo Norte. Los cuatro vértices restantes se encontrarán en el Ecuador.

Quitamos uno de los vértices del Ecuador y solamente por simetría redistribuimos los restantes los cuales quedarán con una distribución similar a la del problema de los tres ejércitos.

La menor distancia entre ejércitos conseguida es la mitad del meridiano terrestre. En definitiva la solución para nuestro problema será asignarle a los ejércitos las siguientes ubicaciones:

- Polo Sur,
- 0° (meridiano de Greenwich); 0°0'0" latitud norte,
- 60° longitud oeste; 0°0'0" latitud norte, y
- 60° longitud este; 0°0'0" latitud norte,
- Polo Norte

Problema 22. De Rosario a las Malvinas

Frente al Monumento a la Bandera en Rosario hay una placa que indica la distancia desde Rosario hasta Puerto Argentino en nuestras Islas Malvinas.

Figura 83. Placa de distancia Rosario – Puerto Argentino

Le propongo verificar esa distancia. Específicamente vamos a calcular la distancia que hay desde el Monumento a la Bandera en Rosario hasta la Iglesia Cristiana de Puerto Argentino en las Islas Malvinas.

Figura 84. Iglesia Cristiana en Puerto Argentino.

Supondremos que la tierra es una esfera perfecta. Adoptaremos como diámetro de la misma su diámetro medio: 12742 km.

Vamos a comparar nuestro cálculo con otro que asumimos correcto. Debemos poner de relieve entonces que la distancia va a variar según cuales sean los puntos de referencia que se adopten. No sabemos si quienes hicieron el cálculo consideraron el Aeropuerto, el Cementerio Argentino u otro lugar de Malvinas; hay 91 km de distancia entre el primero y el segundo. En Rosario es probable que hayan elegido el Monumento a la Bandera o el mismo Monumento a los Caídos en Malvinas. Nosotros adoptamos las siguientes referencias:

Posición	**Coordenadas geográficas**	**Coordenadas esféricas**
Monumento a la Bandera en Rosario	32° 56' 52" S, 60° 37' 45" O	-32.948, -60.629
Iglesia Cristiana de Puerto Argentino en Malvinas	51° 41' 32" S, 57° 51' 32" O	-51.692,-57.859

Pautas para resolver

La distancia más corta entre dos puntos de la superficie de una esfera, es el arco de circulo máximo que pase por esos puntos. En nuestro caso es el arco que va desde Rosario a Puerto Argentino.

Resolución

Elegimos la resolución mediante software CAD. Esta herramienta brinda notables facilidades cuando se trata de resolver problemas donde intervienen objetos tridimensionales. El proceso sería el siguiente:

- Ubicar los puntos con coordenadas esféricas teniendo en cuenta que las coordenadas suministradas son geográficas por lo que debemos realizar la traducción correspondiente.
  Coordenadas de Rosario: 6371 < 299d22'15" < 327d03'08"
  Coordenadas de Puerto Argentino: 6371 < 302d08'28" < 308d18'28" donde el primer número es el radio de la tierra.
- Trazar el arco que une estos dos puntos con centro en el centro de la tierra.
- La longitud del arco a través de la escala, 2096.31 km y es la distancia buscada.

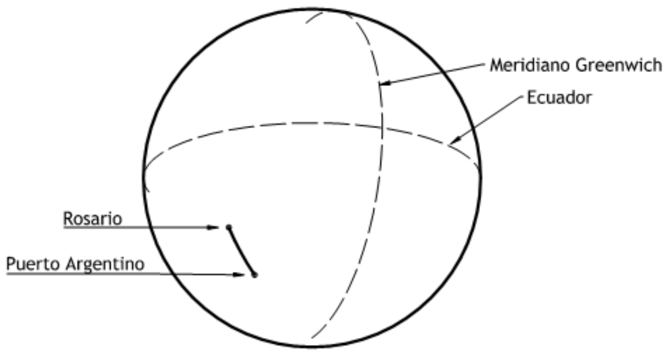


Figura 85. Arco Rosario – Puerto Argentino

Comparando con la distancia que figura en la placa, 2095.44 Km, encontramos una diferencia de 870 metros que puede explicarse porque el geoide no es una esfera perfecta o bien por los lugares exactos elegidos para hacer la medición; si es éste el caso, bastaría con correrse unas pocas cuadras para anular la diferencia.

Problema 23. Envases originales

En una oportunidad nos consultó un fabricante de cosméticos con un requerimiento bastante original. El hombre había impuesto un estilo de embalaje, entregando sus productos en cajas con forma de tetraedro, como el que se muestra en el croquis de figura 86.

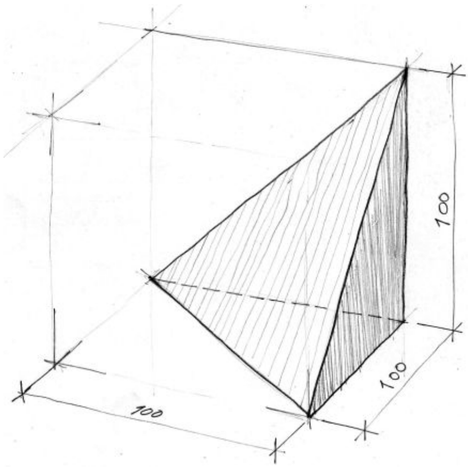


Figura 86. Croquis del envase

Se acercaba el mundial de futbol y deseaba entregar perfumes para hombres en frascos con forma de pelota de futbol, perfectamente esféricos, en su empaque tradicional. Su consulta apuntaba a conocer el diámetro mayor que podía darle al envase esférico para utilizar las cajas disponibles sin deformarlas.

Pautas para resolver

Inscribir una esfera del mayor diámetro posible en el tetraedro indicado. Las caras del poliedro serán planos tangentes a la esfera.

Análisis - Resolución

En primer lugar determinaremos el centro de la esfera. Por ser tangente a las caras del tetraedro el centro de la esfera debe pertenecer al plano bisector de cada ángulo diedro. Habrá entonces cuatro planos bisectores y dada la simetría del tetraedro todas las intersecciones de planos concurren a un punto que será el centro de la esfera buscada. El radio de la esfera queda determinado por el segmento de perpendicular que va desde el centro a una cara.

Una vez en claro cuál es el objetivo no habrá problemas en implementarlo con la herramienta de nuestra conveniencia. Una vez más sugiero utilizar el software CAD por su simplicidad, velocidad, precisión y posibilidades de visualización a lo largo de todo el proceso.

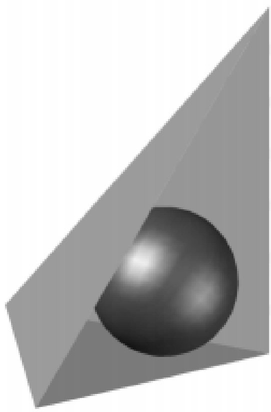


Figura 87. Envase en la caja abierta

Encontramos así que el diámetro máximo de la esfera es de 42.26 mm

Capítulo 5
¿Por qué proyecciones?

Justificaciones

Trabajar con proyecciones implica comprender geometría descriptiva; lo que a su vez nos demandará algún esfuerzo que por mínimo que sea es bastante natural la propensión a evitarlo. Es entendible entonces que si se pueden obtener proyecciones automáticamente a partir de modelos 3D entonces usted se pregunte ¿para que las estudiaremos? Pues bien, existen varios motivos:

- Interpretar un plano. Las vistas que se presentan en un plano son proyecciones. Es necesario entender las proyecciones para realizar una lectura correcta de esas vistas.
- Que las vistas se puedan generar automáticamente no quita que en alguna circunstancia sea necesario realizar al menos un croquis técnico; esto implica trazar proyecciones.
- Si se comete un error en el proceso de modelado – generación automática de vistas, conociendo de proyecciones estamos en condiciones de detectarlo y corregirlo.
- Adicionalmente se pueden presentar problemas cuya solución se vea notablemente simplificada con el concepto de proyecciones. Ejemplo de ello son las Elipses de Steiner.

Elipses de Steiner

El problema que sigue se debe a Jakob Steiner, destacado geómetra suizo (1796 - 1863), y es un excelente ejemplo de problema de difícil resolución analítica, pero que resulta notablemente fácil con un enfoque gráfico, utilizando el concepto de proyección.

Se da un triángulo y se desea calcular cuál sería el área mínima de la elipse circunscripta y el área máxima de la elipse inscrita en él.

Problema 24. Elipse circunscrita de Steiner

Dado un triángulo trazar la elipse circunscripta de área mínima y calcular el área de la misma. Planteado originalmente por Jacob Steiner, geómetra suizo del siglo XIX.

Se va a resolver para un triángulo de lados 5, 7 y 9 unidades, no obstante el procedimiento es aplicable a cualquier triángulo.

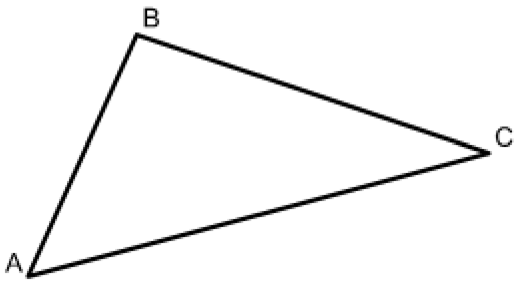


Figura 88. El triángulo que se da como dato

Pautas para resolver

Puestos ante el problema es posible que no sepamos cómo encararlo. Intentaremos resolverlo siguiendo las sugerencias generales para la resolución de problemas; pensamos en un problema similar a este como puede ser el Problema 14. Triángulo inscripto de área máxima.

Podemos vincular los dos problemas suponiendo que el triángulo propuesto y la elipse buscada son proyecciones de un triángulo equilátero y la circunferencia circunscripta de área mínima.

Como se vio en la sección de proyecciones, una figura contenida en un plano oblicuo al plano de proyección se proyecta como una figura similar y de superficie igual a la superficie de la figura original multiplicada por el coseno del ángulo comprendido entre el plano de la figura y el plano de proyección.

Por lo tanto, el problema se transforma en proyectar esa circunferencia con su triángulo equilátero inscripto de forma tal que la proyección del triángulo de como resultado el triángulo del enunciado.

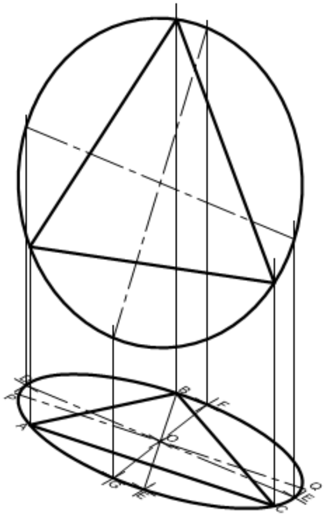


Figura 89. Ilustración de los elementos y su proyección

Analicemos el conjunto que imaginamos se está proyectando; ver figura 90.

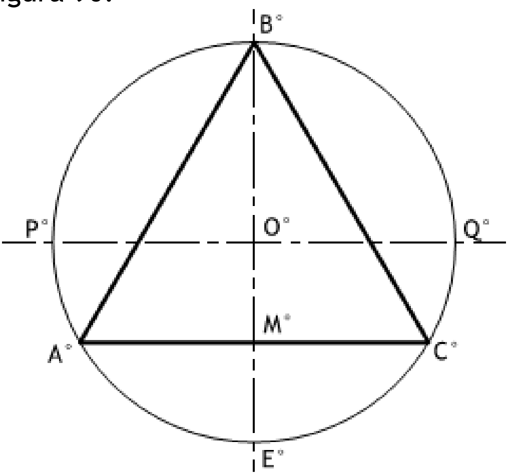


Figura 90. Triángulo equilátero inscripto en circunferencia

El punto $O°$ es simultáneamente baricentro, incentro, circuncentro y ortocentro del triángulo equilátero $A°$-$B°$-$C°$.

Nos interesa particularmente que sea baricentro del triángulo equilátero pues las medianas del triángulo dado son proyecciones de las medianas del triángulo equilátero y por lo tanto la proyección del baricentro $O°$ coincidirá con el baricentro O del triángulo proyectado; y adicionalmente, será el centro de las elipses buscadas. En la figura que consideramos se proyecta tenemos que:

- B°E° es diámetro de la circunferencia y contiene a la altura del triángulo A°B°C°.
- B°O°es el radio de la circunferencia circunscripta y se lo puede ubicar inmediatamente en el triángulo dado; por lo que ya se tiene un diámetro de la elipse.
- P°Q°es diámetro de la circunferencia perpendicular a B°R°, por lo que al proyectarse resultará diámetro conjugado de B°R° en la elipse proyección.

Se tendrán entonces dos diámetros conjugados de la elipse con lo cual esta última queda definida.

Con este análisis comprobamos que tenemos los elementos necesarios para alcanzar una solución. Procedemos entonces a realizar los trazados necesarios.

Diámetros conjugados de la elipse proyección

Trazando las medianas del triángulo ABC queda determinado el baricentro **O**.

Proyectando el diámetro de la circunferencia B°E° tendremos un diámetro de la elipse; el centro de ésta es el baricentro del triángulo; para determinar el punto E hacemos OE igual a BO.

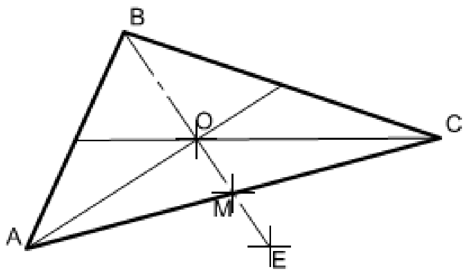


Figura 91. Determinación del baricentro y un diámetro.

Proyectando el diámetro P°Q° de la circunferencia, paralelo al lado A°C° y perpendicular al diámetro B°E°

tendremos PQ, diámetro de la elipse conjugado de BE. Para encontrar esta proyección tendremos en cuenta que segmentos paralelos en el espacio resultarán paralelos en sus proyecciones y sus longitudes se reducen en la misma proporción.

El diámetro conjugado de BE es la proyección de P°Q°, siendo P°Q° perpendicular a B°E°, paralelo a A°C° y pasando por O°.

Como el paralelismo entre rectas se conserva en las proyecciones (ver proyección de segmentos), el diámetro que buscamos estará sobre una recta **t** que pase por O y sea paralela al lado AC.

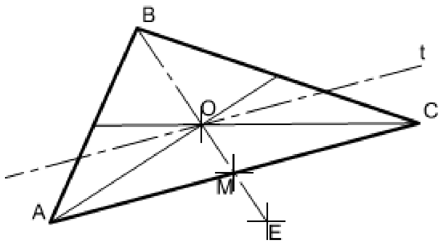


Figura 92. Determinación del diámetro BE

Para determinar la longitud de este diámetro debemos considerar que las rectas paralelas en el espacio, se proyectan paralelas y reducen su longitud en la misma proporción.

La longitud del diámetro PQ de la elipse se establecerá en relación con la longitud del lado AC ya que, al ser paralelos, las proyecciones conservan las proporciones existentes entre el lado del triángulo equilátero y el diámetro de la circunferencia circunscripta.

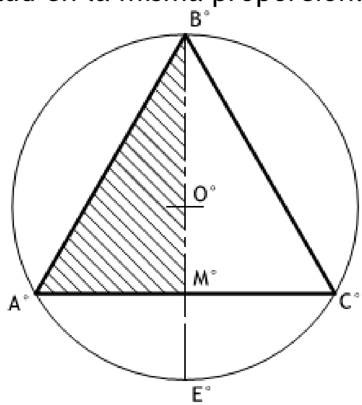


Figura 93. Relación circunferencia a triángulo equilátero

Para obtener la longitud del diámetro PQ construimos un triángulo equilátero de lado igual al AC; determinamos su circuncentro;

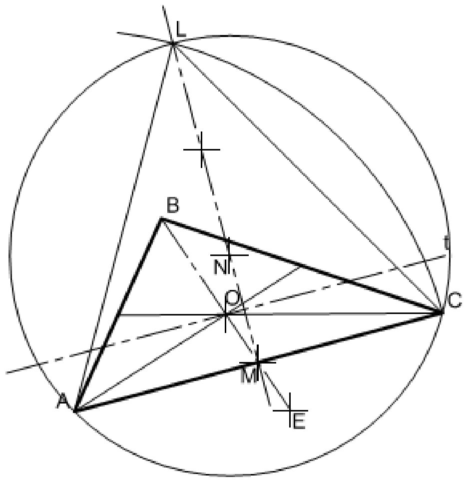


Figura 94. Reconstrucción del diámetro paralelo a AC

Trazamos la circunferencia circunscripta, cuyo diámetro tiene la longitud buscada, y aplicamos simétricamente sobre la recta **t**.

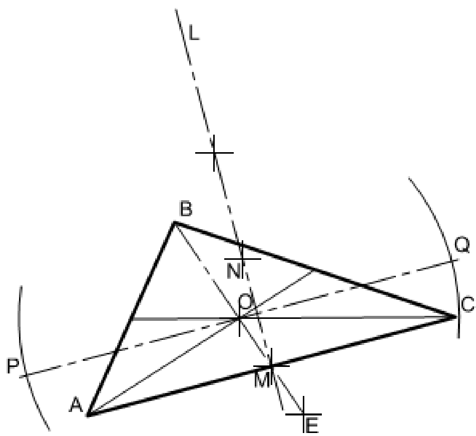


Figura 95. Aplicación del segundo diámetro conjugado

Con los diámetros conjugados de la elipse vamos a determinar los ejes principales. Utilizamos el método de Ritze.

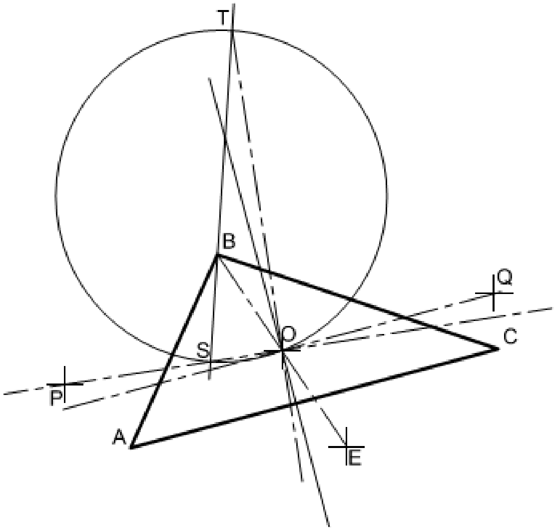


Figura 96. Determinación de ejes principales de la elipse

Corresponde comentar que con los diámetros conjugados se puede trazar la elipse. Sin embargo los ejes principales permiten realizar el trazado con comandos de software CAD y proveen un método adicional para calcular la superficie de la elipse.

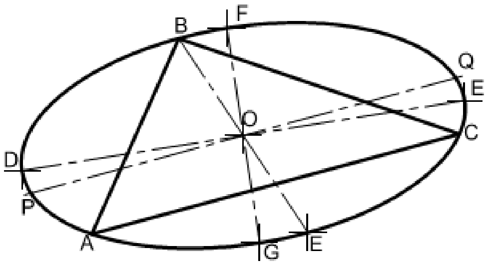


Figura 97. Elipse circunscripta de mínima área

Área del triángulo.

Haremos el cálculo de dos formas:

- mediante la fórmula de Herón y
- tomando datos del dibujo con CAD

Fórmula de Herón para el cálculo

$$\acute{A}rea = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Donde s es el semiperímetro del triángulo:

$$s = \frac{1}{2}(\,a+b+c\,)$$

$$s = \frac{1}{2}(\,5+6+7\,) = 9$$

Y el área del triángulo será:

$$\acute{A}rea = \sqrt{9\,\cdot\,(9-5)\,\cdot\,(9-6)\,\cdot\,(9-7)} = 14.697$$

Área de la elipse

$$Area\ Elipse = \pi\ \cdot a\ \cdot b$$

Donde a y b son los semiejes de la elipse. En nuestro caso las longitudes de estos semiejes se extraen del dibujo original y son: 37.0643 y 17.7204

Con los valores anteriores se puede calcular la superficie de la elipse.

$$Area\ Elipse = \pi\ \cdot 37.0643\ \cdot 17.7204 = 20.6338$$

Verificamos el resultado tomando datos del dibujo CAD y comprobamos que el área es 20.6338

Capítulo 6
Poliedros regulares

Llamamos poliedro a un cuerpo geométrico sólido limitado por un conjunto finito de polígonos planos tales que cada uno de los lados pertenezca a dos de dichos polígonos, y que dos polígonos cualesquiera que tengan un lado común no pertenezcan a un mismo plano.

Elementos de los poliedros

Elementos geométricos fundamentales de los poliedros son:

- Caras: son los polígonos planos que lo limitan.
- Aristas: son los lados de las caras.
- Vértices: son los extremos de las aristas.
- Ángulos planos: son los ángulos de las caras.
- Ángulos diedros son los ángulos formados por dos caras contiguas.
- Ángulos poliedros: Son los ángulos sólidos formados por las aristas concurrentes en cada uno de los vértices, y cuyas caras son los ángulos planos que tienen un vértice común.

Definición

Se llama *poliedro regular* al poliedro cuyas caras son todas polígonos regulares e iguales, y cuyos ángulos diedros son todos iguales. Se los conoce también como Sólidos de Platón

Existen nada más que cinco poliedros regulares convexos.

En efecto, para formar un ángulo sólido, es menester por lo menos tres ángulos planos, y que, además, la suma de los ángulos planos que han de formar el ángulo sólido o poliedro valga menos que cuatro rectos (360º). Se deduce que sólo pueden existir los siguientes casos:

Caras concurrentes al vértice	Ángulos a sumar	Suma de los ángulos
3 triángulos equiláteros	3 x 60º	180º
4 triángulos equiláteros	4 x 60º	240º
5 triángulos equiláteros	5 x 60º	300º
3 cuadrados	3 x 90º	270º
3 pentágonos regulares	3 x 108º	324º

Es decir, solo pueden existir cinco poliedros regulares convexos. Llamando:

C: Número de caras del poliedro
A: Número de aristas del poliedro
V: Número de vértices del poliedro
M: Número de lados de cada cara
N: Número de aristas en cada vértice

Como se tienen que cumplir las condiciones:

$$m \geq 3 \text{ y } 3 \leq n < 6$$

resulta el siguiente cuadro correspondiente a los únicos cinco poliedros regulares convexos existentes:

Nombre	M	N	C	V	A	Naturaleza	
						Caras	Ángulos sólidos
TETRAEDRO	3	3	4	4	6	Triángulos	Triedros
OCTAEDRO	3	4	8	6	12	Triángulos	Tetraedros
ICOSAEDRO	3	5	20	12	30	Triángulos	Pentaedros
CUBO	4	3	6	8	12	Cuadrados	Triedros
DODECAEDRO	5	3	12	20	30	Pentágonos	Triedros

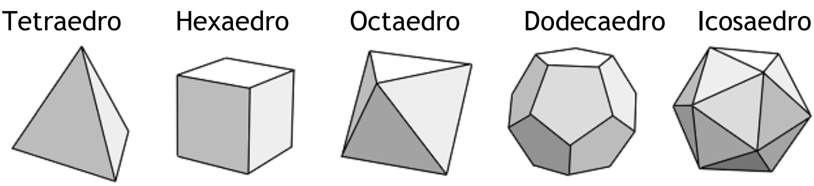


Figura 98. Poliedros regulares

Modelado de poliedros regulares

Un poliedro regular queda perfectamente especificado con un solo dato, por ejemplo, la medida de sus lados.

Modelar un poliedro regular es cosa simple si se conoce el camino para hacerlo. En la práctica existen diferentes posibilidades para cada poliedro, cada una con su correspondiente exigencia de laboriosidad. Le propongo explorar un camino simple, común a todos los poliedros: modelarlos a partir de un cubo. Ciertamente que generar un cubo no ofrece ninguna dificultad, sea en sistema diédrico, axonométrico o CAD y por tanto es bastante razonable utilizarlo como punto de partida.

Tetraedro regular

Observando el cubo notamos que las diagonales de caras opuestas son perpendiculares como las aristas no concurrentes de un tetraedro y las que son coplanarias forman triángulos equiláteros.

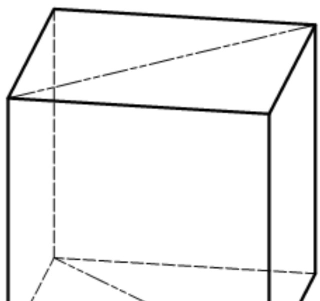


Figura 99. Diagonales de caras opuestas en cubo

Entonces, podemos formar cuatro triángulos equiláteros con igual disposición que las caras de un tetraedro regular como se aprecia en figura 100.

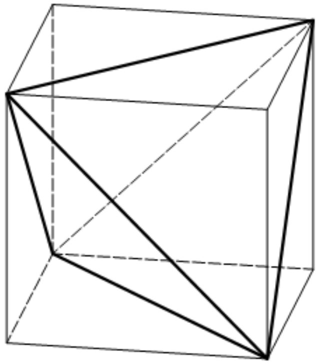


Figura 100. Diagonales que forman un tetraedro

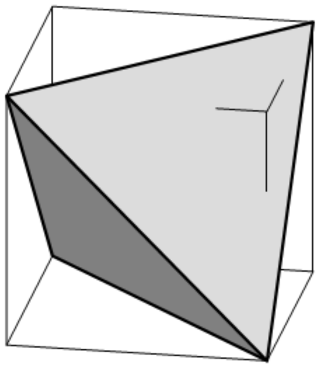


Figura 101. Tetraedro a partir de un cubo

Una vez que tenemos determinadas aristas y vértices del poliedro procedemos a modelar cortando por los vértices que determinan cada una de las caras. En el caso de poliedros convexos esto es posible ya que el poliedro queda en un mismo semiespacio respecto del plano determinado por cada cara.

Relación entre las aristas del tetraedro y del cubo:

$$l = \sqrt{2} \times a$$

Donde:

l : es la arista del tetraedro y

a: es la arista del cubo

Octaedro regular

El octaedro regular es el poliedro conjugado del hexaedro regular, por lo tanto lo podemos obtener determinando los puntos medios de las caras del cubo, que serán los vértices del octaedro y luego cortando con planos secantes que pasen por los puntos de tres caras mutuamente adyacentes.

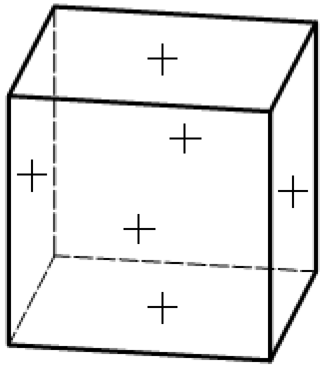


Figura 102. Puntos medios de las caras del cubo

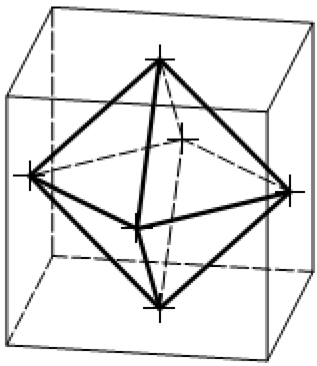


Figura 103. Trazado aristas octaedro regular

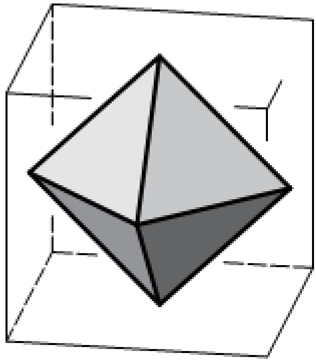


Figura 104. Octaedro a partir de un cubo

La relación entre las aristas del octaedro regular y las del cubo es:

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2} \times a$$

Donde:
l: es la arista del octaedro y
a: es la arista del cubo

Alternativamente se puede modelar un octaedro regular a partir tres cuadrados pertenecientes a planos perpendiculares entre sí, con las diagonales compartidas. Los lados de los cuadrados pasan a ser lados del octaedro.

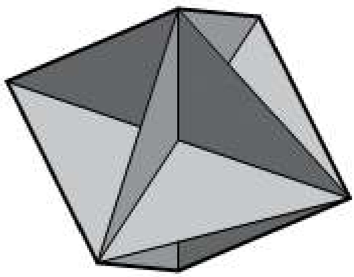


Figura 105. Modelado alternativo de octaedro regular

Dodecaedro regular

La relación entre el lado de un dodecaedro y el del cubo a partir del cual se puede modelar es:

$$l = \frac{a}{\Phi^2}$$

Donde:

l : es la arista del dodecaedro,

a: es la arista del cubo y

Φ: es el valor de la relación áurea.

Adoptaremos el valor aproximado de Φ = 1,618. Para un cálculo más exacto ver relación áurea en el glosario.

La relación de lados resultante es: $l = 0{,}382 \times a$

El lado del dodecaedro lo podemos obtener gráficamente mediante la construcción de figura 106.

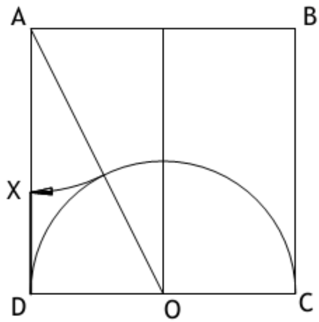


Figura 106. Obtención lado dodecaedro

La construcción se justifica porque en el cuadrado ABCD de lado a tenemos:

$$AO^2 = AD^2 + DO^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$AO = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times a$$

$$l = XD = a - \left(AO - \frac{a}{2}\right) = a - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \times a - \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{3}\right) \times a$$

$$l = 0{,}382 \times a$$

Comenzamos colocando segmentos de longitud igual a 0,382 veces la arista del cubo en los centros de dos caras opuestas y paralelos a un par de lados. En las caras restantes también colocamos segmentos de la misma longitud, cuidando que sean perpendiculares a los segmentos de las caras adyacentes. Estos segmentos van a ser aristas de nuestro dodecaedro regular.

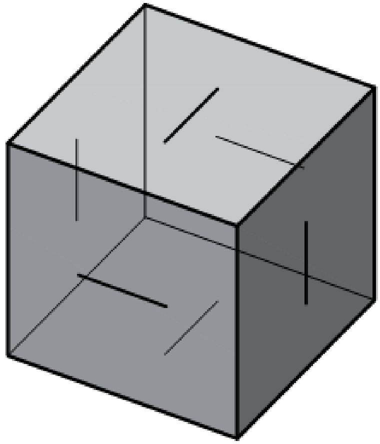


Figura 107. Fijación aristas dodecaedro

Cada arista, conjuntamente con el extremo más próximo de de la arista de la cara adyacente más próxima, determina un plano que contendrá una cara del dodecaedro. El modelado implica cortar el cubo por las caras determinadas “quitando el material excedente”. Cuando se hayan preparado las caras del dodecaedro que concurren a la cara superior del cubo y las caras laterales tendremos un sólido como el que muestra la figura 108; el dodecaedro en proceso de modelado.

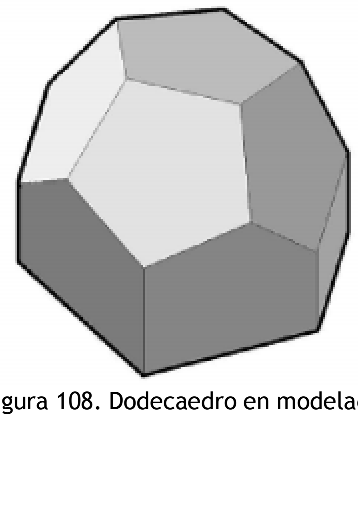


Figura 108. Dodecaedro en modelado

En el caso del modelado con software CAD una vez que se ha modelado la mitad del poliedro es posible hacer una copia, alinearla adecuadamente y por intersección de volúmenes obtener el dodecaedro regular como muestra figura 109.

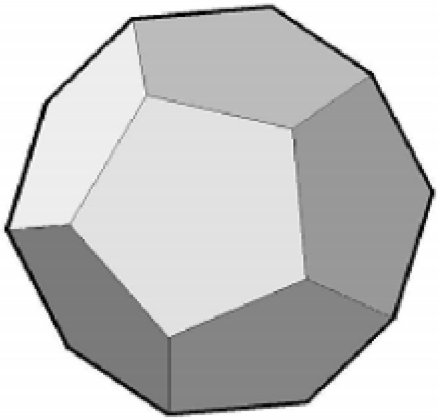


Figura 109. Dodecaedro regular

Icosaedro regular

La relación entre el lado de un icosaedro regular y el del cubo a partir del cual se puede modelar es:

$$l = \frac{a}{\varphi}$$

Donde:

l : es la arista del dodecaedro,
a: es la arista del cubo y
φ: es el valor de la relación áurea.

La relación de aristas es: $l = 0{,}618 \times a$

Este último valor se puede obtener gráficamente mediante la construcción de figura 110.

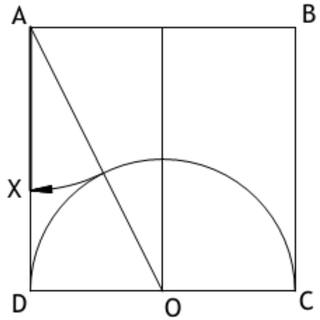


Figura 110. Obtención lado icosaedro

La ubicación de los segmentos con que iniciamos el modelado se realiza con un criterio similar al utilizado para modelar el dodecaedro regular. Colocamos dos segmentos de longitud igual a 0,618 veces la arista del cubo en los centros de dos caras opuestas y paralelos a una dirección de lados. En las caras restantes colocamos segmentos de la misma longitud, cuidando que sean perpendiculares a los segmentos de las caras adyacentes. Estos segmentos van a ser aristas de nuestro icosaedro regular.

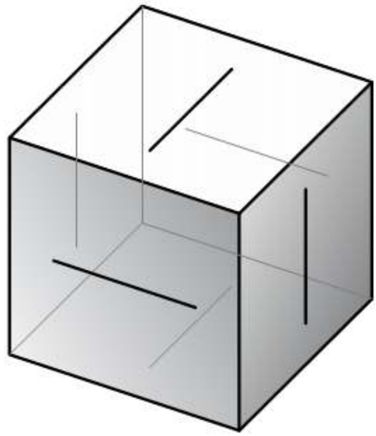


Figura 111. Fijación aristas icosaedro

Cada arista, conjuntamente con el extremo más próximo de la arista de la cara adyacente, determina un plano que contendrá una cara del icosaedro.

El modelado implica cortar el cubo por las caras determinadas "quitando el material excedente". Cuando se hayan preparado las caras del icosaedro que concurren a la cara superior del cubo y las caras laterales tendremos un sólido como el que muestra la figura 112; el icosaedro en proceso de modelado.

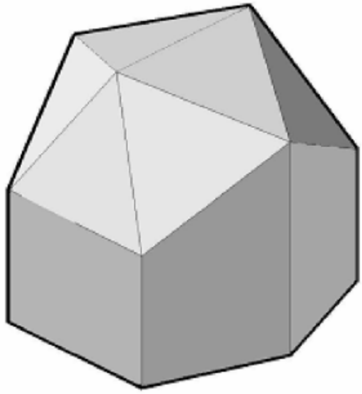


Figura 112. En proceso de modelado

Una vez más, en caso del modelado con software CAD, cuando se ha modelado la mitad del poliedro es posible hacer una copia, alinearla adecuadamente y por intersección de volúmenes obtener el icosaedro regular como muestra figura 113.

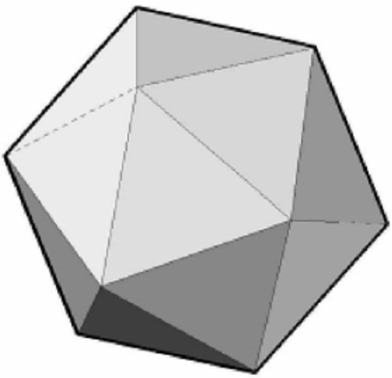


Figura 113. Icosaedro regular

Icosaedro truncado

Siendo que estamos en un país futbolero no podríamos dejar este tema sin antes mencionar que operando sobre este último poliedro regular se obtiene el esquema de gajos de un modelo de pelota de futbol que estuvo en uso durante mucho tiempo.

A partir del icosaedro regular, truncando los vértices por puntos que pasen a una distancia del vértice igual a un tercio de la longitud de la arista, el plano secante da lugar a una nueva cara pentagonal, y las caras triangulares del icosaedro se transforman en caras hexagonales. El resultado de este proceso es un poliedro conocido como icosaedro truncado que podemos ver figura 114.

Figura 114. Icosaedro truncado

Capítulo 7
Dibujos ilustrativos

Axonometrías ortogonales

Utilizando el concepto de proyectar un objeto sobre un plano de forma que se muestren varias caras simultáneamente obtendremos dibujos ilustrativos de una apariencia similar, en cuanto a la forma y proporciones, a la de una imagen fotográfica. ¿Cuál es la diferencia? En la foto los rayos luminosos pasan por un foco ubicado a una distancia finita del objeto; similar a la proyección central. En la proyección paralela los rayos visuales o proyectantes provienen del infinito. La similitud de una proyección central con la imagen real la haría más apetecible como dibujo ilustrativo, sin embargo, la facilidad de trazado de una axonometría hace que ésta sea la elegida cuando se trata de ilustrar sin una exagerada necesidad de realismo.

Para ejemplificar la explicación tomemos un cubo y asociémoslo con una terna de ejes coordenados. Para que se puedan ver simultáneamente tres de sus caras será necesario que las aristas del mismo, al igual que los ejes, sean todas oblicuas respecto del plano de proyección.

Siendo que los ejes forman un cierto ángulo con el plano de proyección, entonces las líneas paralelas a los ejes van a proyectarse con una medida menor que la real.

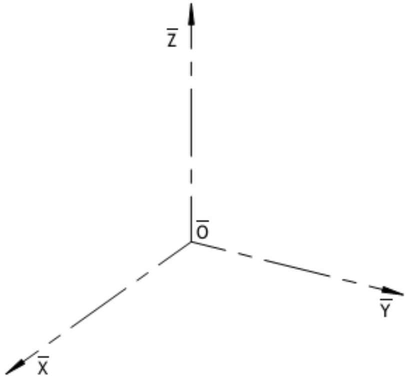


Figura 115. Ejes axonométricos

La relación entre la medida con que se proyecta un segmento y su medida real se conoce como coeficiente de reducción, cuyo valor siempre es menor que uno, e igual para todos los segmentos que formen el mismo ángulo con el plano de proyección. O sea, todos los segmentos paralelos a un eje tendrán el mismo coeficiente de reducción. De esta propiedad se vale esta técnica de trazado cuyo nombre significa medir sobre los ejes.

Podemos distinguir las axonometrías según los ángulos formados por los ejes coordenados con el plano de proyección y entonces las llamamos así:

- Isometría: los tres ejes forman el mismo ángulo con el plano de proyección
- Dimetría: dos ejes forman el mismo ángulo con el plano de proyección y el tercero un ángulo diferente.
- Trimetría: los tres ejes forman distintos ángulos con el plano de proyección.

Llamaremos ejes axonométricos a la proyección de los ejes cartesianos. El ángulo formado entre los ejes axonométricos dependerá de la posición de la terna con respecto al plano de proyección. Por convención siempre se dispone al eje axonométrico Z en forma vertical.

Isometrías

Se trata de una representación ilustrativa de un objeto en el que un cubo imaginario que contiene el objeto se inclina hasta que una de sus diagonales se convierte en perpendicular al plano de proyección y los tres ejes coordenados quedan igualmente inclinados respecto a este plano de proyección. Los ejes axonométricos también forman entre sí ángulos iguales.

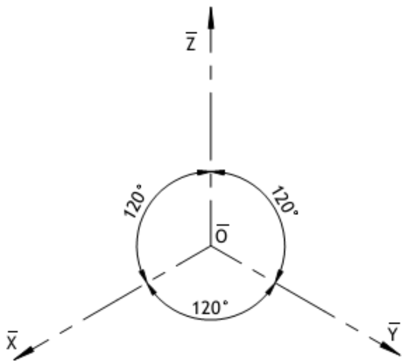


Figura 116. Ejes axonométricos para una isometría

Escala isométrica

Se muestra la proyección isométrica de un cubo en la figura que sigue.

El contorno de la figura es un hexágono y tres aristas concurren al centro del mismo. Las aristas no visibles se acostumbra a no dibujarlas a menos que sean estrictamente necesarias.

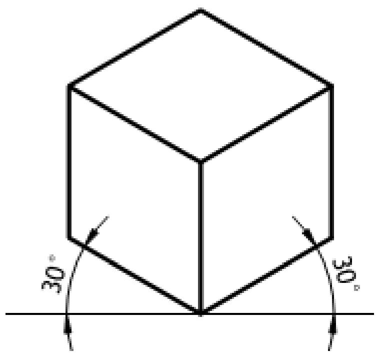


Figura 117. Isometría de un cubo

Las aristas, oblicuas al plano de proyección se proyectan reducidas y las caras se deforman proyectándose como rombos. Una de las diagonales de cada cara se proyecta con su medida real, o como se dice, en verdadera magnitud. Como puede concluirse analizando la figura 118.

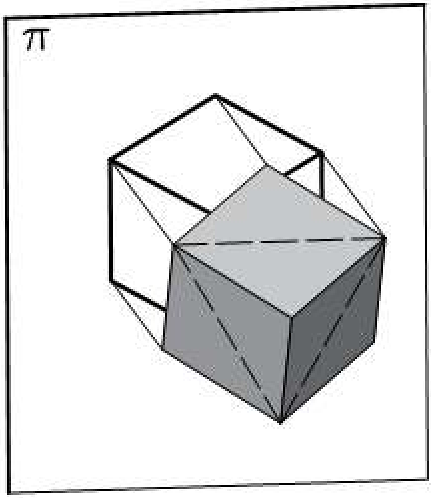


Figura 118. Generación de una proyección isométrica

Problema 25. Coeficientes de reducción en isometría

Vamos a trazar dibujos ilustrativos con esta técnica, por lo tanto necesitamos conocer los coeficientes de reducción para la isometría. A los tres ejes le corresponden iguales coeficientes de reducción. Se pide determinar el valor de los coeficientes de reducción para la proyección isométrica.

Pautas para resolver

Debemos hacer notar que el coeficiente de reducción se puede calcular analíticamente o gráficamente.

Elegimos este último como método de cálculo.

Observando la anterior figura 118 vemos que una diagonal se proyecta en verdadera magnitud por estar paralela al plano de proyección lo que nos permite reconstruir la cara con su proyección y entonces determinar el coeficiente de reducción.

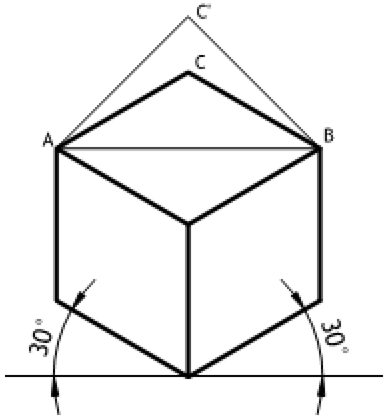


Figura 119. Isometría de un cubo

Resolución

Trazamos la isometría del cubo con lados de 100 unidades de longitud. Recordemos que en este caso particular la diagonal se presentaba en verdadera magnitud.

Trazamos dos lados, AC' y C'B, perpendiculares entre sí y coincidentes sus extremos con los de la diagonal. El cociente entre la medida proyectada y el lado AC' es el coeficiente de reducción. En nuestro caso es 0,816. La inversa, 1.2247 es la escala natural de la isometría.

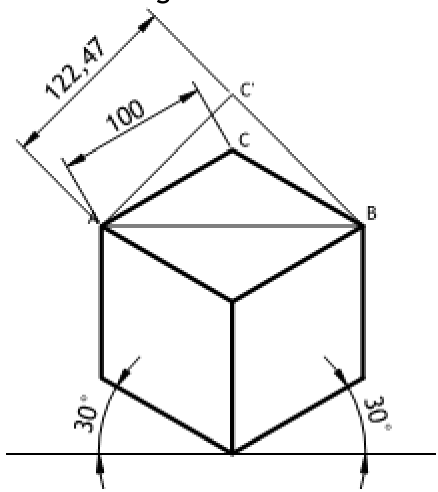


Figura 120. Disposición para calcular coeficientes de reducción

Observaciones sobre la proyección isométrica

- Los ejes isométricos se reducen en la relación de 1 a 0,816 es decir aproximadamente 82%.
- Las líneas que son paralelas en el objeto son paralelos en la proyección isométrica.
- Las líneas verticales del objeto aparecen verticales en la proyección isométrica.
- Las líneas horizontales del objeto se dibujan en un ángulo de 30° con la horizontal.
- Las líneas paralelas a un eje axonométrico se llaman líneas isométricas.
- Una línea que no es paralela a un eje isométrico se llama línea no-isométrica. No estableceremos sus coeficientes de reducción ya que no las utilizaremos para el trazado.

Dibujo isométrico

Hemos visto la técnica para conseguir un dibujo ilustrativo. Vamos a simplificarla aún más; en lugar de afectar todas las medidas por el coeficiente de reducción, lo que haremos será aplicar directamente las medidas reales. Obtendremos entonces un trazado que será el 22% más grande que la proyección isométrica. Para el objetivo perseguido, presentar nuestras ideas en forma pictórica, el tamaño de nuestra ilustración es irrelevante.

A esta clase de representación, la llamaremos dibujo isométrico. En lugar de coeficientes de reducción utilizaremos factores más cómodos para manejar, como el uno en este caso, y le llamaremos escala axonométrica.

En estas condiciones disponemos de un método muy fácil de trazar perspectivas. Quienes no tenemos habilidades artísticas, agradecidos.

Una ventaja adicional de los dibujos axonométricos es que podremos tomar medidas directamente sobre las líneas axonométricas.

Problema 26. La forma del bloque

Se presenta un dibujo isométrico de un bloque. ¿Le queda en claro cuál es la forma?

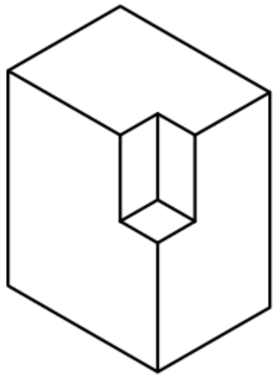


Figura 121. Isometría de un bloque.

Pautas para resolver

No se apure a contestar. Primero observe con detenimiento y piense cuáles son las formas posibles para resultar en el dibujo ilustrativo que se presenta. ¿Qué es lo que parece ser? ¿Qué otra forma puede verse como la presentada?

Puede ser un prisma rectangular al que se le ha quitado una esquina con forma de prisma cuadrangular más pequeño. Podría ser también un rincón en el techo de una habitación donde se ha colocado una saliente con forma de prisma cuadrangular.

¿Cabe alguna otra posibilidad?

Resolución

Efectivamente, cabe otra posibilidad. Que sea un prisma rectangular con una saliente prismática también pero ubicada de forma tal que resulte en la isometría presentada. Para describirlo completamente mostramos las imágenes que se obtienen de ir rotando el objeto progresivamente.

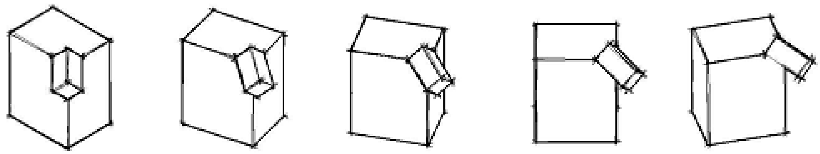


Figura 122. Imágenes del objeto giradas progresivamente

De este último problema podemos extraer algunas conclusiones:

- Una representación plana tiene limitaciones para representar un objeto tridimensional. Mayormente no existen inconvenientes para una interpretación inequívoca, en ocasiones porque no hay ambigüedades posibles o también por la buena voluntad del lector del plano. Pero como terminamos de ver, cabe la posibilidad de que existan ambigüedades y consecuentemente una interpretación erronea.
- Es necesario disponer de otras posibilidades para la realización de dibujos ilustrativos, distintas del dibujo isométrico, para evitar las ambigüedades detectadas.

Otras axonometrías

En teoría sería posible definir tantas axonometrías como quisiéramos. Debemos tener en cuenta que al modificar la posición de los ejes con respecto al plano de proyección las escalas axonométricas cambian en correspondencia para mantener el mejor realismo posible en la representación. A los efectos prácticos vamos a emplear un conjunto reducido de axonometrías que permitan atender las necesidades de contar con diferentes puntos de vista.

Una de las axonometrías más usuales es la llamada dimetría normalizada. La norma IRAM 4540 describe la proyección dimétrica donde se aprecian dos ejes con igual reducción y un tercero reducido a la mitad de los anteriores. Una vez más, por cuestiones prácticas, nosotros trabajaremos en la forma de dibujo dimétrico normalizado con una escala axonométrica que observa esas proporciones, ½; 1; 1

o bien 1; ½; 1, y resulta realmente práctica y fácil de manejar.

La disposición de los ejes para trabajar con una escala axonométrica ½; 1; 1 es la que muestra figura 123.

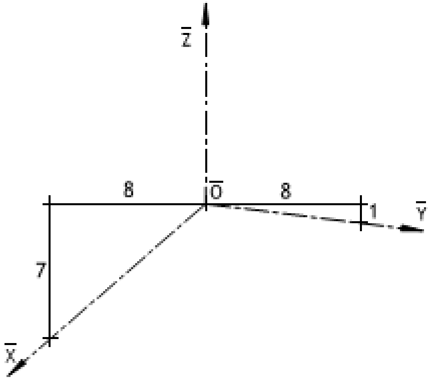


Figura 123. Disposición ejes en dimetría normalizada

El eje Z, como siempre, se traza vertical y a los ejes X e Y se les da las pendientes indicadas. Las líneas paralelas al eje X se dibujan multiplicando su medida por 0.5 y las paralelas a los ejes Y y Z se dibujan con las medidas reales.

En este caso vamos a dibujar multiplicando por 0.5 las medidas paralelas al primer eje y con la medida real a los segmentos paralelos al segundo y tercer eje.

Trabajando con software CAD se puede conseguir una dimetría normalizada asignando al punto de vista las coordenadas: 88.19; 33.33; 33.33

O bien con ángulos: 20.7° desde el eje X y 19.5° respecto del plano XY.

Se debe hacer notar que el software CAD genera una proyección del modelo 3D y por tanto midiendo las aristas del cubo apreciaremos las medidas reducidas como se muestra en figura 124.

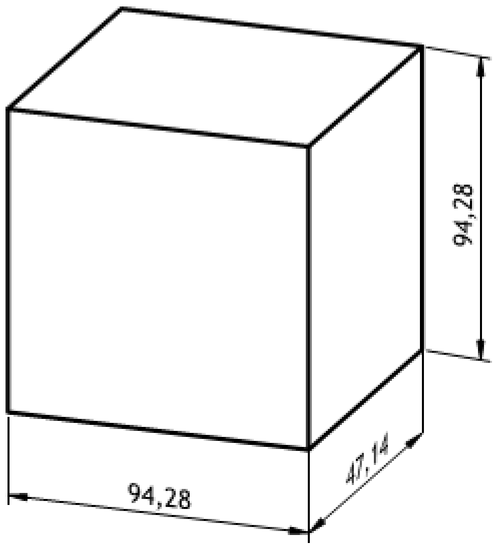


Figura 124. Proyección dimétrica de un cubo

Proyección oblicua

El objeto a representar se asocia a una terna de ejes coordenados. Se ubica una de sus caras paralela a un plano de proyección frontal, es decir, dos ejes coordenados paralelos al plano de proyección. De esta manera las direcciones paralelas al plano π se proyectarán en verdadera magnitud; escala axonométrica: 1. Los segmentos paralelos al eje perpendicular a π sufrirán una reducción que dependerá del ángulo que forme el rayo proyectante con el plano π.

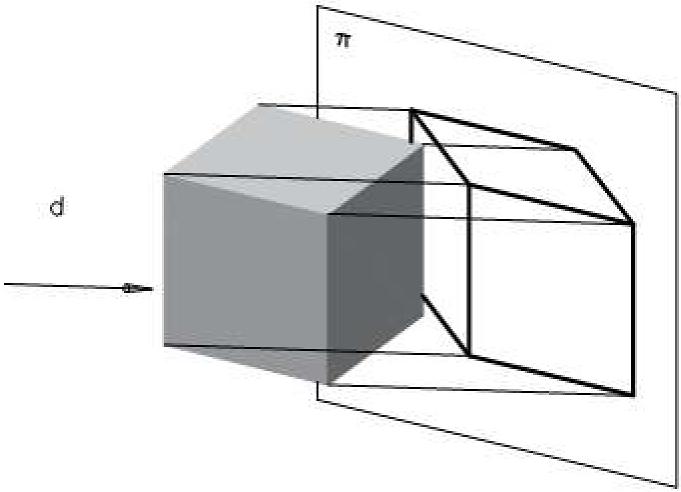


Figura 125. Proyección oblicua

Perspectiva Caballera

Una técnica muy fácil de aplicar a la preparación de dibujos ilustrativos es la perspectiva caballera. Es una de las variantes de la proyección oblicua.

En este caso el eje axonométrico X forma ángulo de 45° con la horizontal y se le asigna una escala axonométrica ½.

Problema 27. Perspectiva caballera

Trazar la perspectiva caballera de un cubo de 25 mm de arista asumiendo que se lo ve desde arriba a la izquierda.

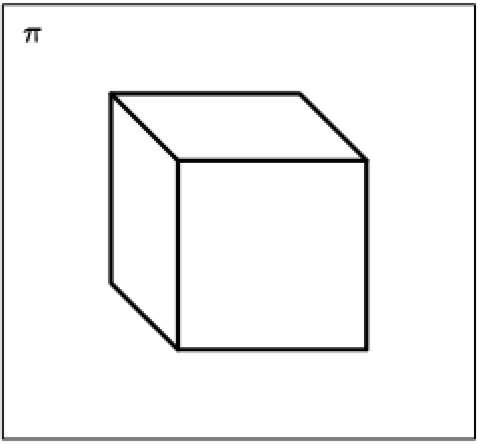


Figura 126. Perspectiva caballera de un cubo

Solución

Siguiendo las reglas establecidas comenzamos por dibujar la cara paralela al plano de proyección que es nuestra hoja de dibujo.

Seguidamente trazamos líneas que formen 45° con la horizontal y en dirección hacia arriba y a la izquierda, o sea, en la misma dirección desde donde lo vemos. Sobre esas líneas aplicamos la longitud de arista multiplicada por ½, que es la escala axonométrica para esta perspectiva. Completamos las líneas que corresponden a la cara trasera y…ya está.

Las líneas no visibles no se dibujan, salvo que sean necesarias para la interpretación de la forma.

Habrá notado qué fácil es dibujar una perspectiva con la técnica adecuada.

Capítulo 8
Desarrollos

Uno de los problemas que debe atender la representación grafica es el desarrollo de piezas que van a ser construidas por corte y plegado.

Consiste en abrir la superficie a desarrollar por una línea, por ejemplo una arista de un poliedro o una generatriz si se trata de una superficie curva desarrollable desplegar la superficie total en un plano. Como ejemplo vemos un prisma oblicuo en figura 127 y su desarrollo en figura 128.

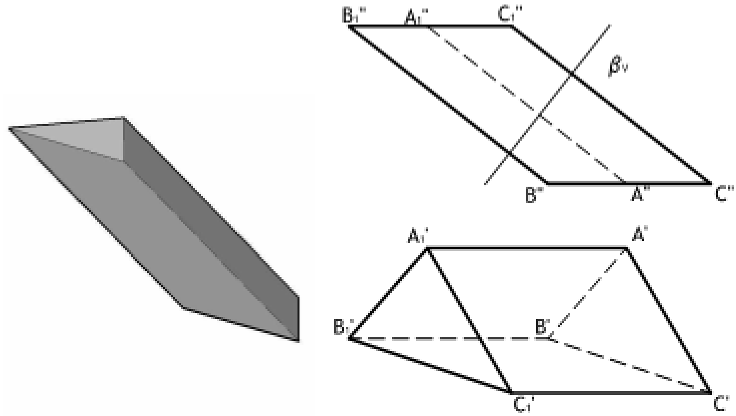


Figura 127. Prisma oblicuo: ilustración y vistas

Esta clase de ejercicios son habituales en los cursos de representación gráfica, dada la representación de un objeto trazar su desarrollo.

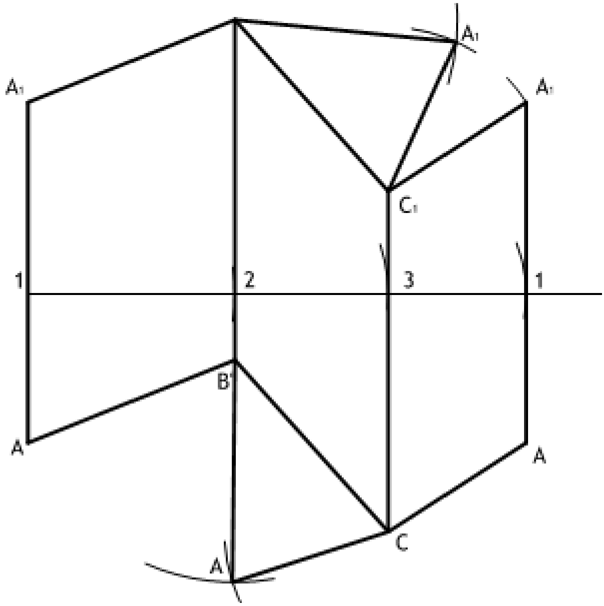


Figura 128. Desarrollo del prisma oblicuo

Para resolver con papel y tijeras

Problema 28. El rombo más grande

Tenemos un trozo de madera con forma de prisma rectangular recto, como el que se muestra en figura 129. Se nos pide cortarlo de modo que la sección plana producida, es decir la figura plana resultante del corte, sea un rombo de las mayores dimensiones posibles.

Los instrumentos de medición que disponemos no son muy confiables; no es posible conocer las medidas exactas; solo contamos con una hoja de papel que lo puede envolver por completo y unas tijeras.

Figura 129. Paralelepípedo de madera y un papel

Pautas para resolver

No disponiendo de medidas la única posibilidad que nos queda para fijar los puntos por donde debe pasar el serrucho es medir y marcar con el papel, doblando y plegando adecuadamente.

Tengamos en cuenta que el tamaño del rombo será proporcional al tamaño de sus diagonales. Se deduce entonces que la diagonal mayor del rombo coincidirá con una de las diagonales del paralelepípedo.

También habrá que tener en cuenta que la otra diagonal debe ser perpendicular a la primera y por supuesto sus extremos pertenecerán a aristas del paralelepípedo en puntos tales que resulten en lados iguales para el rombo.

Lo invito a que usted procure conseguir materiales apropiados para simular el problema e intente resolverlo.

Solución

Dependiendo de la posición del plano secante, la sección transversal de un prisma rectangular puede ser un polígono de tres a seis lados. Estamos interesados en que sea un rombo. Siempre se pueden conseguir rombos cortando adecuadamente un prisma rectangular. Existen infinitos rombos posibles. Nosotros buscamos el rombo más grande. Por lo tanto deberá tener su diagonal mayor coincidente con la diagonal del prisma. Por esa diagonal pasan infinitos planos pero solo algunos dan lugar a rombos. Veamos ahora como encontrarlos.

Método general para determinar una sección plana rómbica

Cortando el prisma rectangular con un plano oblicuo a las aristas y el elegido de modo tal que las distancias entre los puntos de intersección del plano secante con dos aristas consecutivas sean iguales se obtiene un rombo.

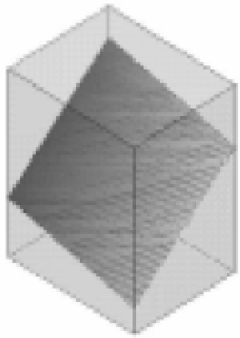


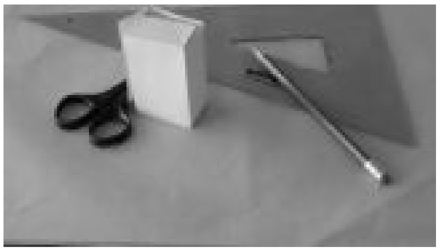
Figura 130. Rombo en prisma rectangular

Para maximizar el tamaño del rombo resultante, se debe pasar a través de los vértices opuestos del prisma.

La diagonal más larga del rombo será una diagonal del prisma. Los otros dos vértices del rombo serán puntos contenidos en aristas paralelas opuestas y equidistantes de los extremos de la diagonal del prisma. Nuestro problema consiste en determinar esos puntos.

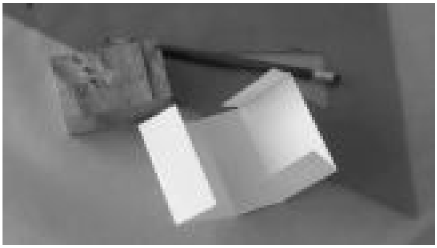
Al no conocer las medidas del trozo de madera no es posible resolver el problema mediante cálculo.

Aquí es donde nos resulta útil el papel que lo envuelve. Procedemos de la siguiente manera:

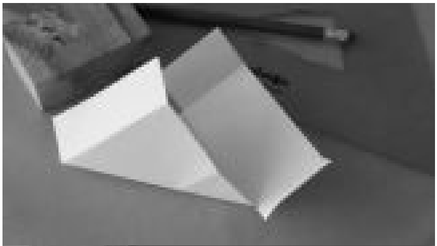


- Envolvemos la pieza de madera y marcamos sobre el papel las aristas.

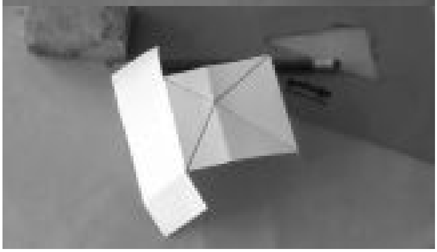
- Desplegamos el papel sobre un plano y tenemos lo que se llama desarrollo del prisma.



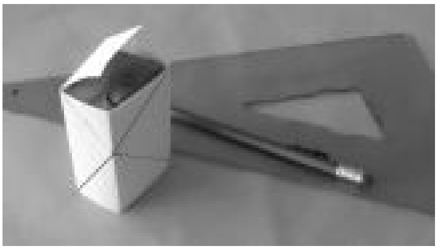
- Doblamos el papel haciendo coincidir los puntos que corresponden a la diagonal del prisma que van a ser la diagonal mayor del rombo y marcamos el pliegue.



- Los puntos de este último pliegue equidistan de los extremos de la diagonal mayor; por lo tanto…



- …su intersección con los pliegues representativos de las aristas señalan los puntos donde deben estar ubicados los extremos de la diagonal menor.



La distancia más corta entre dos puntos

Problema 29. Una araña en Keops

A la vuelta de su viaje a Egipto un amigo nos solicitó ayuda para construir una maqueta a escala de la Gran Pirámide de Keops.

Figura 131. La Gran Pirámide de Keops

La maqueta se hizo con cartón fino en escala 1:100. Es decir cada 100 metros del monumento, la maqueta tendría 100 cm. Las medidas reales de Keops son: base cuadrada de 230 metros y altura de la pirámide 146 metros.

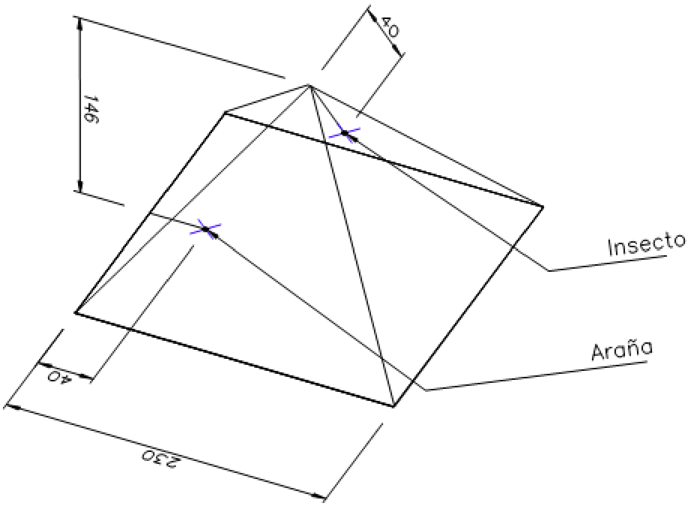


Figura 132. Esquema de medidas de la pirámide de Keops.

Las medidas resultantes fueron: lado de la base 2,30 metros y altura 1,46 metros. Es decir, numéricamente las mismas medidas pero, para la maqueta, tomadas en centímetros.

La maqueta estuvo varios días en exhibición lo que dio lugar a una curiosa historia de supervivencia. En su interior una araña tejió su tela en la cual quedó atrapado un insecto. La araña lo advirtió cuando estaba sobre la base de la pirámide, a 40 cm del punto medio de uno de sus lados. El insecto quedó atrapado contra la cara lateral, opuesta al lado cercano en que se encontraba la araña, a 40 cm de la cúspide y equidistante de ambas aristas.

El problema consisten en ayudar a la araña a alcanzar el insecto haciendo el recorrido más corto posible; para eso debemos resolver dos cuestiones, a saber: a/ por donde debe caminar y b/ la longitud del recorrido.

Pautas para resolver

La distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Pero como en este caso la araña debe hacer un recorrido por una superficie no plana habrá que realizar alguna clase de rectificación de la superficie para encontrar esa línea recta. Esto se consigue desarrollando la superficie lateral de la pirámide y considerando las diferentes ubicaciones que se puede dar a la base de la pirámide, para determinar la distancia más corta.

Resolución

En el desarrollo propuesto y con diferentes ubicaciones para la base de la pirámide podemos apreciar cual va a ser el camino más corto.

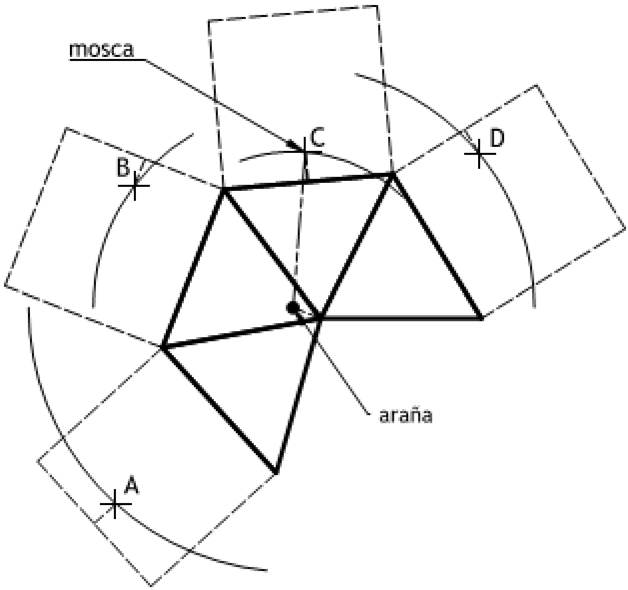


Figura 133. Despliegue de la superficie de la maqueta

Nos quedamos con la cara que ubica a la mosca en el punto C. Esto a su vez nos dice por cuál punto de las aristas debe pasar para conseguir el recorrido más corto.

Desarrollo inverso

Veamos ahora algunos problemas de este mismo dominio pero inversos a los habituales, es decir, dado un desarrollo encontrar y describir gráficamente el objeto implicado, o sea, reconstruir el cuerpo. Aquí van los problemas.

Problema 30. Volumen poliédrico

Preparamos tres cuadrados de 40 mm de lado y los dividimos con una línea que una los puntos medios de dos lados adyacentes como se ve en figura 134.

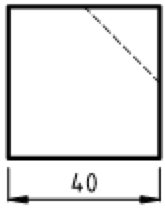


Figura 134. Forma a recortar

También recortamos un hexágono regular de lado igual a la línea de corte del cuadrado anterior, 28.3 mm.

Se colocan tres copias de la forma triangular en lados alternado de un hexágono regular y tres copias de la otra pieza en los lados restantes.

La forma resultante, mostrada en figura 135, se pliega dando lugar a un poliedro de 7 caras.

Se pregunta: ¿Cuál es el volumen del poliedro?

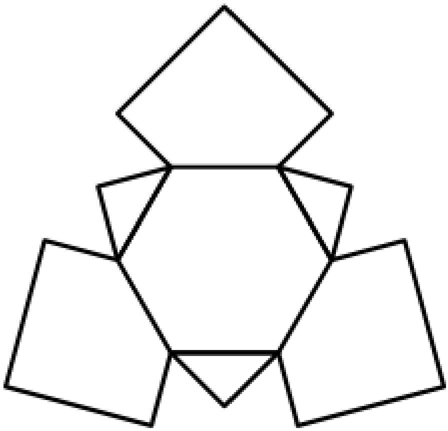


Figura 135. Desarrollo del volumen que se quiere conocer

Pautas para resolver

Si no imagina la forma resultante, construya el desarrollo propuesto e imagine cual sería la forma y tamaño de la maqueta resultante. En caso de ser necesario avance realizando el plegado que dará lugar al poliedro original. Llegado a este punto usted verá que el cálculo de volumen se puede realizar mentalmente.

Resolución

El plegado del desarrollo propuesto resulta en un volumen que observado con detenimiento resulta ser un cubo seccionado por un plano que pasa por los puntos medios de varias de sus aristas y divide al cubo en dos volúmenes iguales.

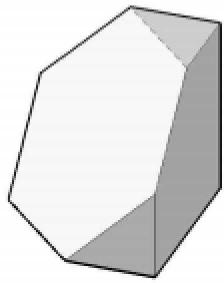


Figura 136. Volumen poliédrico

La pieza resultante se describe mediante sus vistas en la figura.

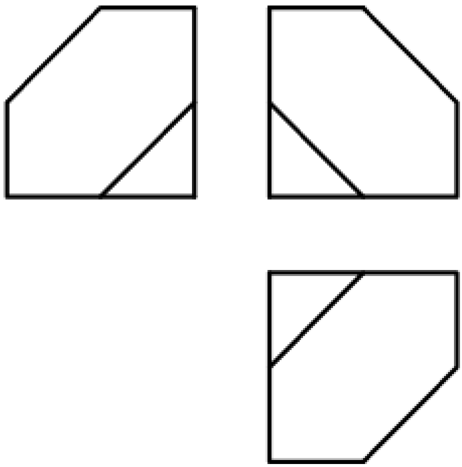


Figura 137. Vistas de la pieza resultante del plegado

En consecuencia el volumen será igual a:

$$V = (lado\ cubo)^3 \div 2 = 64000 \div 2 = 32000mm^3 = 32cm^3$$

Problema 31. Poliedro a partir de triángulo equilátero

Para comenzar con este grupo de problemas lo haremos con uno simple. Se da una pieza plana con forma de triángulo equilátero y se pide encontrar el poliedro que dio lugar a este desarrollo.

Pautas para resolver

Si usted ha visto o resuelto problemas de desarrollo de superficies previamente, con seguridad que en algún momento habrá visto un triángulo equilátero como solución.

Solución

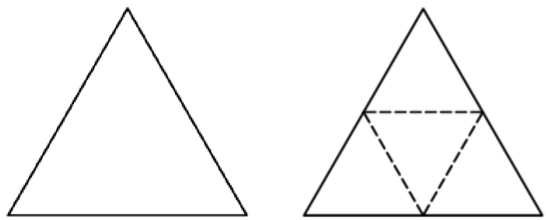


Figura 138. Triángulo equilátero y marcado para plegar

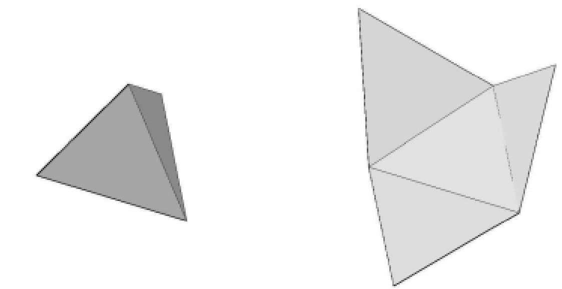


Figura 139. Tetraedro ya plegado y tetraedro en proceso

Problema 32. Superficie que pliega en un cubo

La figura 140 es el desarrollo de un poliedro que no se abrió por las aristas. Las aristas no están trazadas. Intentando volver al volumen original apreciamos las dificultades que se presentan cuando no se cumplen estos dos aspectos en un desarrollo de superficie.

¿Es posible armar un cubo a partir de este desarrollo?

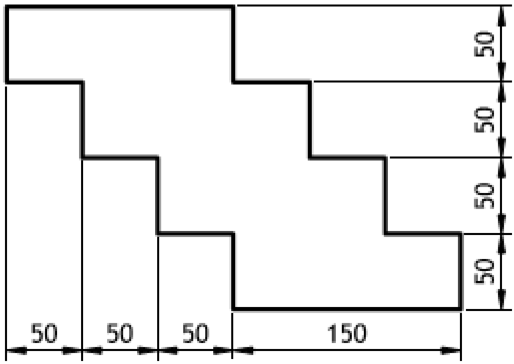


Figura 140. Desarrollo de superficie

Pautas para resolver

Un camino que aportará indicios acerca del volumen que buscamos es considerar el área de la forma dada y la longitud de aristas resultante.

Resolución

Área de la forma dada: 30000 mm^2. En consecuencia, cada cara del cubo tendrá una superficie de 5000 mm^2. Lo que implica una arista de aproximadamente 70,7 mm. Ahora el problema se ha transformado en acomodar las 12 aristas sobre la superficie dada, teniendo en cuenta la posición relativa que deber observar entre ellas.

Aquí caben algunas pruebas y tanteos. Se pueden acomodar tres caras completas en el desarrollo en coincidencia con algunos vértices de la figura. Este hecho de la coincidencia de vértices nos dice que vamos por buen camino. Finalmente se podrá encontrar la disposición de aristas mostrada en la figura 141.

Las partes restantes, no cubiertas por los cuadrados detectados, son mitades o cuartos de cuadrados de esa medida.

Verificamos que esas partes pueden unirse para componer las caras faltantes. Esto último se puede resolver trabajando con software CAD para simular el plegado o construir el modelo en cartulina y verificar que se arme el cubo.

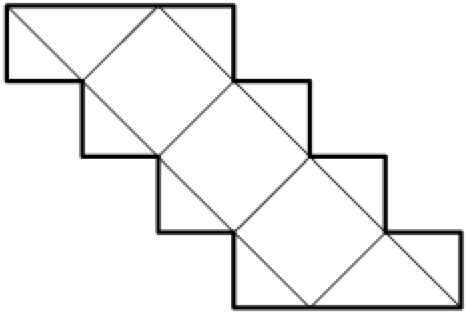


Figura 141. Trazado de aristas sobre la superficie provista

El plegado del desarrollo por las aristas encontradas, antes de realizar el último pliegue, se muestra en figura 142.

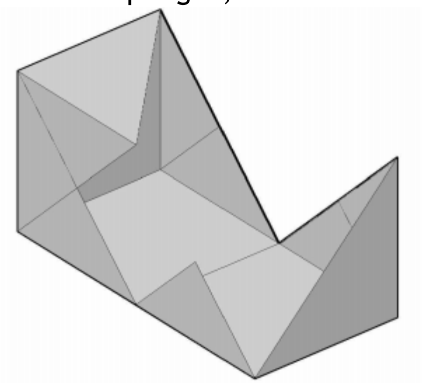


Figura 142. Desarrollo en proceso de plegado

Problema 33. Poliedro con un cuadrado

Después de la entrada en calor con el problema anterior pasamos a un problema un tanto más desafiante.

Supongamos la siguiente situación: nos piden confeccionar unos trofeos muy económicos y se quiere aprovechar la disponibilidad de unos recortes de chapa perfectamente cuadrados. La idea es confeccionar un poliedro. En el taller tenemos algunas restricciones de fabricación. Solamente disponemos de guillotinas y plegadoras de chapa. Las guillotinas hacen cortes y las plegadoras doblan la chapa. ¿Qué solución le podemos ofrecer?

Pautas para resolver

Tenemos que proponer cuales van a ser las aristas y trazarlas. Encontraremos varias soluciones posibles. La más simple es la que muestra el siguiente trazado que podremos plegar como muestra la figura 144.

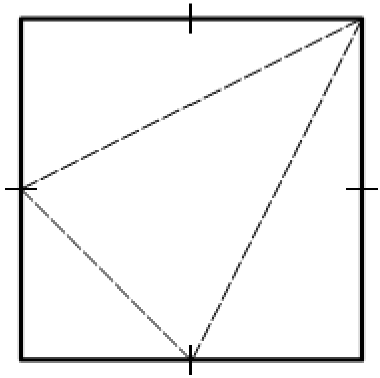


Figura 143. Un trazado para reconstruir un poliedro

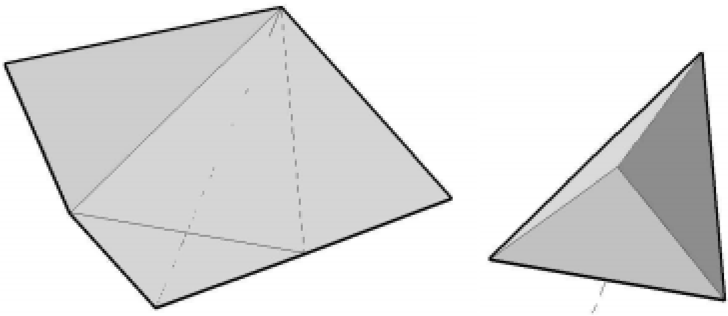


Figura 144. Proceso de plegado para llegar al poliedro

Como dijimos, no es la única solución.

Otra solución

Existen varias posibilidades, todas alrededor de la misma idea. Las figuras que siguen muestran cuales sería las líneas de plegado.

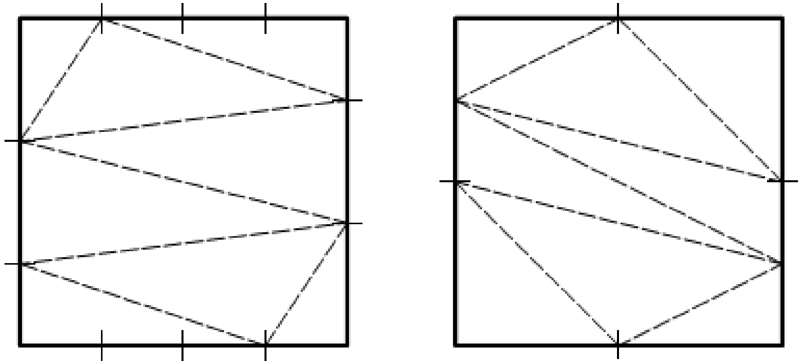


Figura 145. Plegados alternativos de un cuadrado

Elegimos este último esquema para conseguir un poliedro como el que se puede ver en vistas de figura 147.

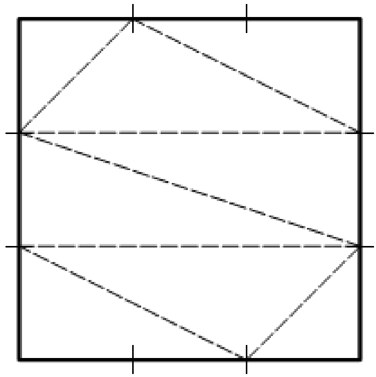


Figura 146. Otro plegado posible

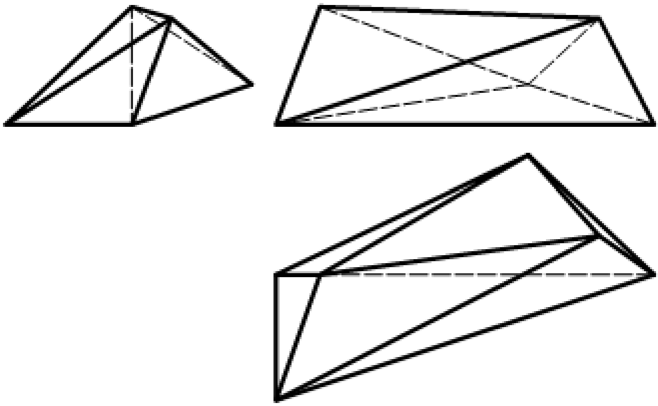


Figura 147. Vistas del poliedro resultante

La imagen ilustrativa de rayos-X ayudará a comprender la forma del poliedro.

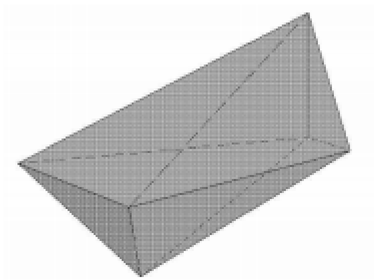


Figura 148. Ilustración con rayos-X del poliedro

Capítulo 9
Más allá de la representación gráfica

Vamos a presentar dos temas que podemos ubicar en el límite de lo que es la representación gráfica. Uno es el de los objetos representados mediante un dibujo ilustrativo y que nos plantean la incógnita sobre su posible existencia en el mundo real. El otro tema es el de los gráficos utilizados en acertijos o juegos de lógica.

Ya vimos que los dibujos ilustrativos de objetos tridimensionales, teniendo solamente dos dimensiones, son necesariamente incompletos. Se pueden encontrar e idear objetos representados por un dibujo ilustrativo que en realidad son imposibles de conseguir. He aquí algunos pocos ejemplos.

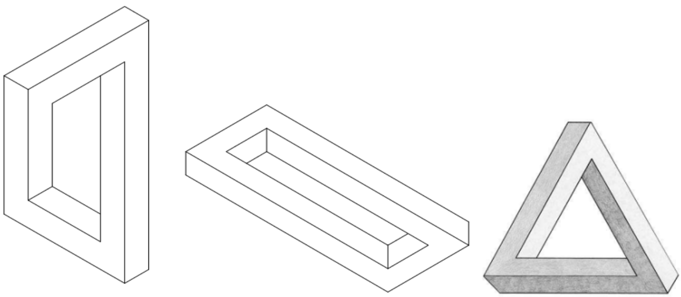


Figura 149. Objetos imposibles

Vamos a analizar algunos objetos propuestos con el propósito de determinar su viabilidad.

Construcciones complicadas

Problema 34. Estructura imposible

Se nos pregunta si es posible construir la estructura de madera que se muestra a continuación.

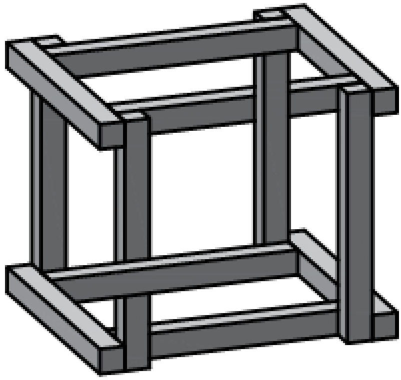


Figura 150. Estructura de madera... ¿es posible?

A primera vista es imposible. Pero antes de afirmarlo contundentemente miremos con un poco de detenimiento.

Pautas para resolver

Nuestro problema consiste en deducir la posibilidad o no de realizar esta construcción.

Tratemos de describir cuál es la dificultad.

¿Que tendríamos que hacer para construir la estructura?

Intentemos hacer un plano del objeto. Determinemos la aparente imposibilidad.

El objeto ¿es lo que percibimos en primera instancia? ¿O le cabe alguna otra forma posible que un dibujo ilustrativo no nos permite distinguir?

Explicación

Modificando el punto de vista vemos que la estructura propuesta no es realmente lo que aparentaba en un principio.

Como decía Mauritius Escher dibujar es engañar un poco.

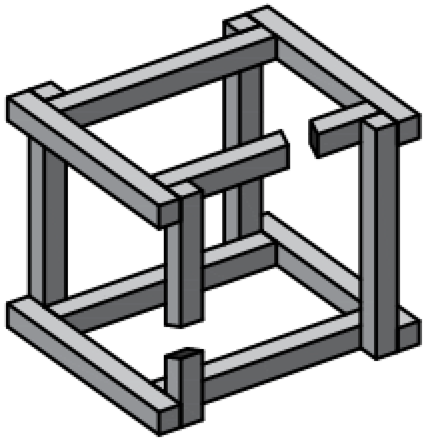


Figura 151. ¡Sí, es posible!

Gráficos y lógica

Traspasando ya las fronteras de la representación gráfica presentamos un juego de lógica que se desarrolla sobre un gráfico: SU-MA-DO. Es un desafío que requiere un mínimo conocimiento de aritmética y bastante lógica.

¿En qué consiste?

Hay círculos unidos por líneas que forman cuadrados y triángulos. Existen varios tipos de SU-MA-DOs que varían en dificultad según la cantidad de círculos. En cada uno de ellos hay un número diferente: de 1 a 9 si es un SU-MA-DO 3x3, de 1 a 16 si es un SU-MA-DO 4x4 y de 1 a 25 si es un SU-MA-DO 5x5. El número dentro de cada triángulo o cuadrado es la suma de los valores de los círculos o vértices de esa figura. El objetivo del juego es deducir los valores de cada vértice, algunos de los cuales ya están asignados. Se dan como ayuda los valores de algunos vértices.

En la figura tenemos un ejemplo de 3 x 3.

Este entretenimiento comparte algunas características del SU-DO-KU y las pirámides numéricas. Por la dificultad para resolver es más simple que el primero y más complicado de resolver que las últimas.

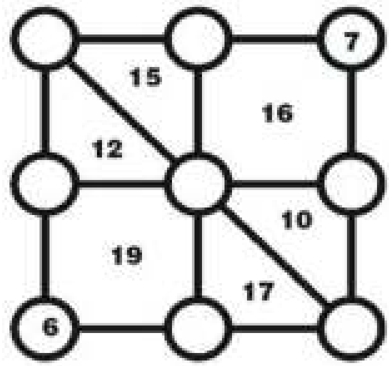


Figura 152. SU-MA-DO de 3 x 3

Ejemplo de resolución

Mostraré una forma posible de resolver el juego. La propuesta es seguir un razonamiento lógico que permita deducir el resultado.

Veamos de qué se trata el problema. Hay nueve circunferencias que ocupan los vértices de seis figuras; cuadrados y triángulos. En cada figura se ha escrito la suma de números ubicados en sus vértices. Los nueve vértices tienen asignados números diferentes del uno al nueve de los cuales se muestran dos.

Si deducimos progresivamente los números que pueden asignarse a cada vértice cuando en un vértice quede un solo número posible, le es asignado y se quita de los números que se pueden asignar a los restantes vértices.

Analicemos los casos extremos, por ejemplo el triángulo cuyos vértices suman 10. Si a dos de esos vértices se asignan los números 1 y 2, entonces el tercero debería ser 7. Esto no es posible, puesto que 6 y 7 ya están asignados. Por lo tanto el mayor número asignable es 5.

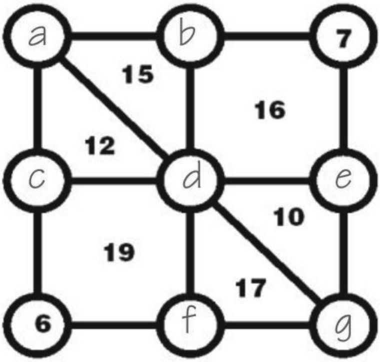


Figura 153. Asignación de letras a vértices

Las formas disponibles para sumar 10 son:

$$5 + 4 + 1 \text{ y } 5 + 3 + 2$$

Entonces el número 5 debe estar en alguno de los tres vértices analizados.

Veamos la suma de los vértices en la parte inferior derecha:

$$d + f + g = 17 \quad [1]$$
$$d + e + g = 10 \quad [2]$$

Los vértice d y g son compartidos en ambas sumas, entonces:

$$f = e + 7 \; [3]$$

Con lo cual f puede ser: 8 o 9; e será 1 o 2 y entonces el número 5 le corresponderá a g o d

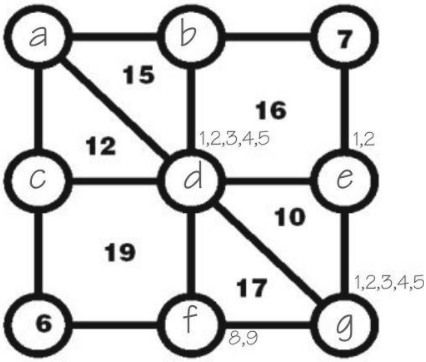


Figura 154. Proceso deducción

En el cuadrado del sector inferior izquierdo

$$c + d + 6 + f = 19 \therefore c + d + f = 13 \quad [4]$$

Sabemos que *f* puede ser 8 o 9. Entonces: *c* + *d* = 5 o *c* + *d* = 4. Como el menor valor asignable es 1, entonces *c* y *d* deben ser menores que 5. Eliminamos 5 de los valores que se pueden asignar a *d* con lo que estamos encontrando el primer número: $g = 5$ [5]

Con este dato la ecuación [1] queda *d*+*f*=12 [6]

De las ecuaciones [4] y [6] deducimos que *c* = 1

Eliminamos 1 como número asignable. Entonces *e* = 2

Reemplazando los valores hallados en la [2] queda *d*=3

A resultas de esto *f*=9

En la parte superior izquierda del gráfico vemos que

$$a + 1 + 3 = 12$$

Resulta entonces *a*=8

Y ya no necesitamos continuar el análisis porque el único número que queda disponible es 4 y se lo debemos asignar al vértice *b*

Con lo que queda resuelto el juego.

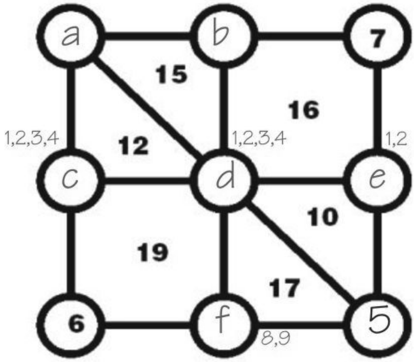


Figura 155. Proceso deducción

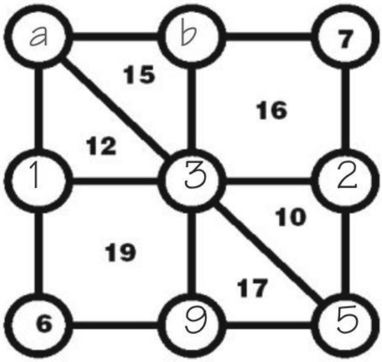


Figura 156. A punto de ser resuelto

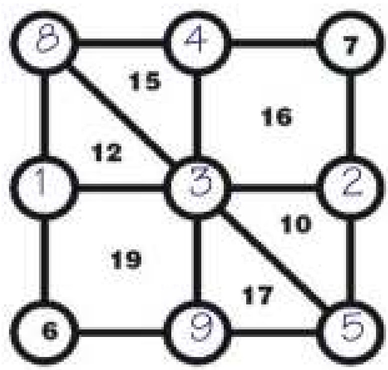


Figura 157. SU-MA-DO resuelto

Problema 35. Sumado 5 x 5

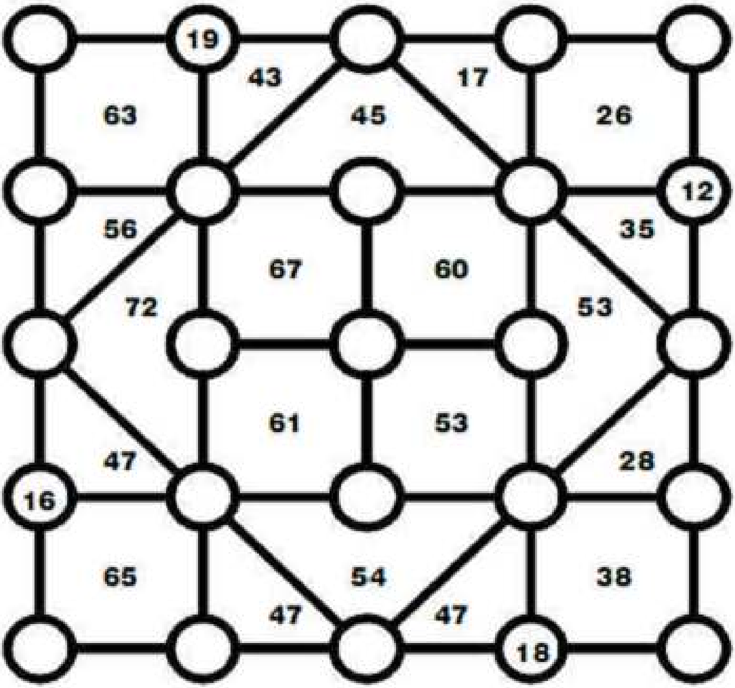


Figura 158. SU-MA-DO 5 x 5

Solución

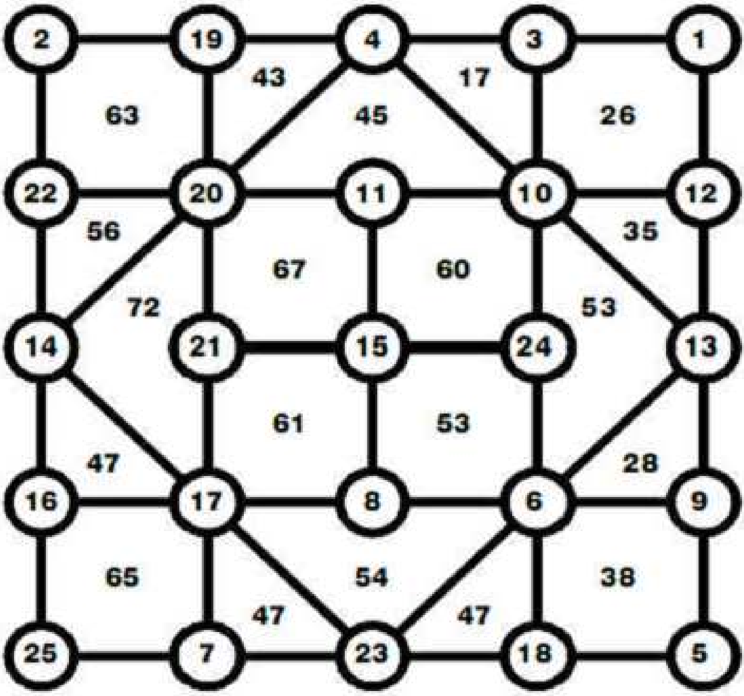


Figura 159. Solución al SU-MA-DO 5 x 5

Glosario

Definiciones y términos encontrados habitualmente en los temas de geometría y representación gráfica.

Ángulo diedro

El ángulo comprendido entre dos planos; las caras del diedro.

Ángulo sólido

El ángulo sólido es el ángulo espacial que abarca un objeto cuando es observado desde un punto de vista dado. Mide el tamaño aparente de ese objeto. La unidad del ángulo sólido en el Sistema Internacional es el estereorradián, cuyo símbolo es sr. Es el área del casquete esférico, en una esfera de radio unidad, abarcado por un cono cuyo vértice está en el centro de la esfera. Es una magnitud adimensional que se representa con la letra griega Ω.

Para calcular el ángulo sólido bajo el cual se ve un objeto desde un punto, se proyecta el objeto sobre una esfera de radio *R* conocido, centrada en el punto de vista. Si el área de la proyección del objeto sobre la esfera es *S*, entonces por definición, el ángulo sólido bajo el cual se ve el objeto es: $\Omega = S/R^2$

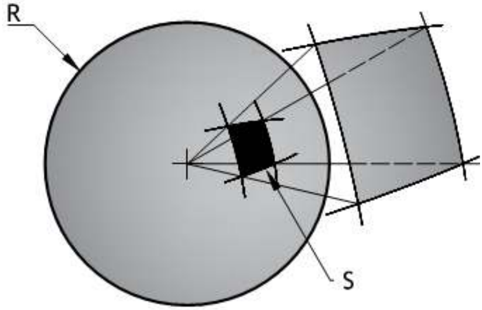


Figura 160. Ángulo sólido

Baricentro

El baricentro o centroide de un triángulo es el punto de intersección de las medianas de dicho triángulo. Para representar gráficamente el baricentro debemos trazar las tres medianas y localizar el punto en el que se cortan.

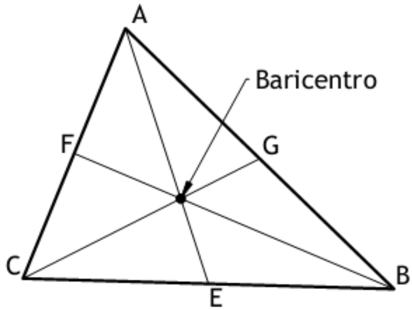


Figura 161. Baricentro del triángulo

Bisectriz

La recta que pasando por el vértice de un ángulo, divide a éste en dos ángulos iguales.

Centros del triángulo

Incentro, baricentro, circuncentro y ortocentro

Circuncentro

El *circuncentro* de un triángulo es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, por lo que la distancia a cada uno de sus vértices es la misma e igual al radio de dicha circunferencia. Es el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo. Por tanto, para determinar gráficamente el circuncentro dibujamos las tres mediatrices y localizamos el punto de intersección de las mismas. Puede verse el circuncentro de un triángulo en figura 162.

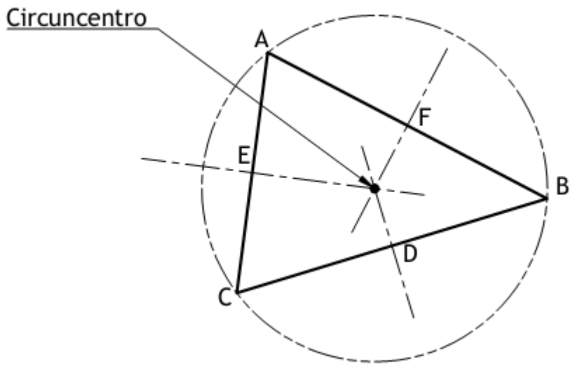


Figura 162. Circuncentro del triángulo

Croquis

Representación a mano alzada de un objeto. Es la forma más rápida de dibujar aunque también la menos precisa. Generalmente es el paso previo para la ejecución del plano normalizado definitivo.

Cuádrica

Superficie tridimensional correspondiente a una ecuación de segundo grado. Ejemplos son el elipsoide, paraboloide e hiperboloide.

Cuerda

Segmento rectilíneo, que une dos puntos de una circunferencia, sin pasar por el centro.

Diámetros conjugados de la elipse

Cada par de diámetros de la elipse que cumple que uno de ellos pasa por el centro de todas las cuerdas paralelas al otro.

Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos del plano en que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos llamados focos es constante.

Elipsoide

Superficie engendrada por una elipse cuando gira alrededor de uno de sus ejes.

Geometría

Es el arte y la ciencia de la descripción y la medida del espacio. Parte de las matemáticas que se encarga del estudio de las líneas, figuras y cuerpos, incluyendo su teoría y aplicaciones en las creaciones sobre papel. La geometría es una de las ciencias más antiguas. Inicialmente constituida en un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, áreas y volúmenes.

Sus orígenes se remontan a la solución de problemas concretos relativos a medidas. Tiene su aplicación práctica en física aplicada, mecánica, arquitectura, cartografía, astronomía, náutica, topografía, balística, etc.

Geometría descriptiva

Es la ciencia que da los fundamentos para describir en un plano la estructura y propiedades métricas de objetos tridimensionales y, mediante la lectura de la representación plana realizar el proceso inverso.

Geometría gráfica

Disciplina que tiene por objeto la resolución de problemas geométricos por métodos gráficos. Se llega a esta definición por analogía con la Geometría Analítica cuyo objetivo es la resolución de problemas geométricos mediante métodos algebraicos.

Hipérbola

Curva plana, lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Incentro

El centro de la circunferencia inscripta al triángulo. La distancia a cada uno de los lados es la misma e igual al radio de la circunferencia. Es el punto de intersección de las bisectrices de cada uno de los ángulos del triángulo. Para determinarlo gráficamente se trazan las tres bisectrices; es el punto de intersección de las mismas.

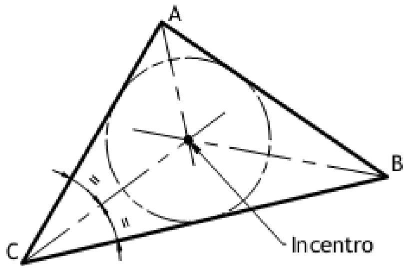


Figura 163. Incentro del triángulo

Lúnula

Es la parte del plano comprendido entre dos arcos de círculo con los mismos extremos y con las concavidades hacia el mismo lado.

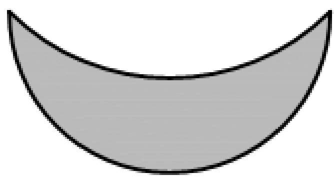


Figura 164. Lúnula

Mediana

Segmento que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Mediatriz

La recta perpendicular a un segmento que pasa por el punto medio del mismo.

Ortocentro

El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de las tres alturas del triángulo. Entonces para representar gráficamente el ortocentro de un triángulo dibujamos las tres alturas y nos quedamos con el punto en el que se intersecan. Ver figura 165.

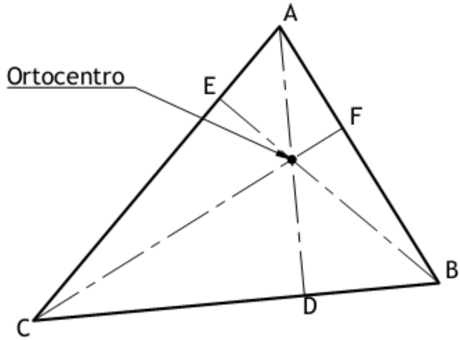


Figura 165. Ortocentro del triángulo

Parábola

Curva plana, lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta llamada directriz.

Relación áurea o proporción áurea

Dados dos segmentos a y b, a más largo que b, con longitudes tales que la suma de ambos es al más largo como el más largo es al menor, entonces, se dice que los segmentos están en proporción áurea.

Como ecuación algebraica sería: $(a+b)/a = a/b$

El valor del número áureo Φ es la relación a/b

La relación algebraica se puede expresar como $1 + {}^{1}/_{\Phi} = \Phi$

Resolviendo queda $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ =1,618 033 988 749 895

Triángulo equilátero, isósceles, escaleno

Se pueden distinguir los triángulos según cuántos lados o ángulos iguales que tengan.

- Triángulo equilátero: tres lados iguales; tres ángulos iguales, todos 60°
- Triángulo isósceles: dos lados iguales; dos ángulos iguales. La suma de los ángulos iguales es mayor que 0° y menor que 180°
- Triángulo escaleno: los tres lados y los tres ángulos diferentes.

Vista

Es la proyección de un objeto sobre un plano, de modo que:

- el objeto quede interpuesto entre el plano proyección y el observador, cuyos rayos visuales dan la dirección de proyección
- se ubique al objeto de forma que alguna de sus caras sea paralela al plano de proyección.

Esta definición, según norma IRAM 4501, se corresponde con el sistema ISO europeo.

Bibliografía

GARDNER M. “Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas”, Alfaguara, 2009

INSTITUTO ARGENTINO PARA LA RACIONALIZACION DE MATERIALES, Normas IRAM para Dibujo Tecnológico

KATZ R., SABATINELLI P. "Geometría Analítica con Software". UNR Editora. 2012.

KINDLE J., “Geometría Analítica Plana y del Espacio”, McGraw-Hill, 1987.

LOOMIS E. "The Pythagorean Proposition". 1968.

POLYA G., “Como plantear y resolver problemas”, Trillas, 1969.

STACHEL H., “The status of todays Descriptive Geometry related education (CAD/CG/DG) in Europe”, Proc. Annual Meeting of JSGS 2007, 40th anniversary of Japan Society for Graphic Science, Tokyo/Japan, 2007.

STEWART J. “Cálculo de una variable”, Séptima edición, 2012.

VERGER G., LINE E. "Maximizing the Rhombic Cross-Section in a Rectangular Prism", Revista ‘Sigma Math’, Mensa UK.

VERGER G., BARBERI E., ST JEAN G., “Representación gráfica con herramientas CAD – 1 Problemas tradicionales”, V Congreso Internacional de Expresión Gráfica, EGRAFIA 2014.

VERGER G., D’ASCANIO F., ACIEN F., CARUSO E., LOMÓNACO V., “Representación gráfica con herramientas CAD – 2 Cálculo gráfico”, V Congreso Internacional de Expresión Gráfica, EGRAFIA 2014.

WELLMAN, B.L., “Geometría descriptiva”. Editorial Reverte, 2003.

Listado de problemas

Esta edición de 200 ejemplares se terminó de imprimir el 12 de diciembre de 2014 en los talleres gráficos de la Imprenta Editorial Magenta, Av. Pellegrini 358, 2000 Rosario, Argentina