Capítulo 3
Cálculo gráfico

Se pueden realizar cálculos gráficamente. Desde los más simples hasta algunos muy complejos. Esto no quiere decir que se pretenda suplantar el cálculo algebraico. Se quiere poner de relieve que disponemos de un método alternativo de cálculo. En algunos casos será conveniente utilizar el método algebraico, en otros el método gráfico. El calculista decidirá cuál es el más adecuado. También cabe la posibilidad de utilizar un método para el cálculo y el otro para la verificación; por ejemplo, en el Problema 10. Cruce de botes.

Escalas

Sea que tengamos que representar gráficamente un objeto o las magnitudes que intervienen en un cálculo debemos adoptar una relación entre las magnitudes representadas y los segmentos que las representan; esto es lo que se conoce como escala.

Toda representación gráfica debe llevar la escala utilizada. Difiere la forma de definir una escala según sea que estemos representando unidades de longitud u otro tipo de unidades.

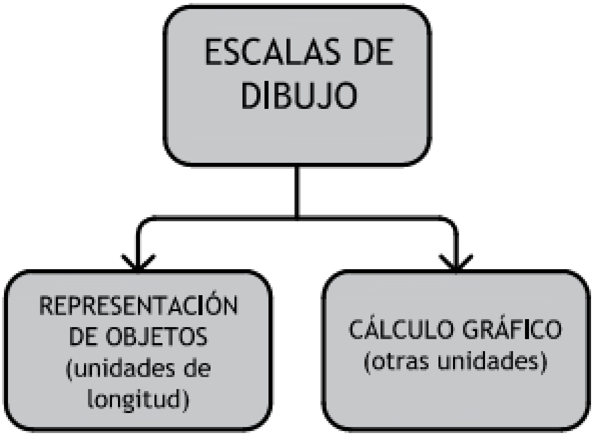


Figura 33. Criterios para escalas de dibujo

Escalas para representación de objetos

Son necesarias para la representación de objetos que exceden el tamaño del plano a realizar o cuando son muy pequeños, cosa que impediría apreciar los detalles.

Una escala de dibujo es la relación entre la dimensión dibujada y la dimensión real.

$$Escala\ de\ dibujo = \frac{Tamaño\ en\ el\ dibujo}{Tamaño\ real}$$

Cuando el numerador de la fracción es mayor que el denominador, tenemos una escala de ampliación, y en caso contrario será de reducción. La escala 1:1 corresponde a un objeto dibujado a tamaño real y le llamaremos escala natural.

Escalas para cálculo gráfico

El cálculo se realiza representando las diferentes magnitudes intervinientes con longitudes proporcionales a las mismas.

Al operar gráficamente se aconseja representar una muestra de la escala que permitirá comprobar los cálculos realizados.

$$Escala\ para\ cálculo\ gráfico = \frac{Unidad\ de\ medida\ representada}{Tamaño\ en\ el\ dibujo}$$

Para representar una magnitud determinada dividimos su valor por la escala. Al extraer un resultado multiplicamos la longitud del segmento que lo representa por el valor de la escala. Se puede acompañar la representación con una escala gráfica ayuda a lograr una rápida aproximación al valor buscado.

Operaciones Aritméticas

Resolvemos gráficamente operaciones aritméticas disponiendo segmentos de longitud proporcional a los números que representan utilizando una escala conveniente.

Suma

La suma se resuelve gráficamente yuxtaponiendo segmentos representativos de los sumandos sobre una recta. El segmento resultante pasado a través de la escala nos devuelve el resultado.

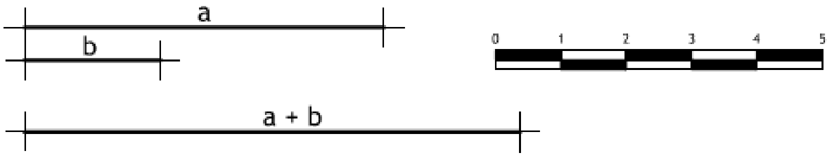


Figura 34. Suma gráfica

Resta

Encontramos gráficamente la diferencia entre dos números superponiendo segmentos representativos de los mismos sobre una recta de forma tal que coincidan en uno de sus extremos; el segmento que une los extremos no coincidentes representa la diferencia que evaluamos a través de la escala.

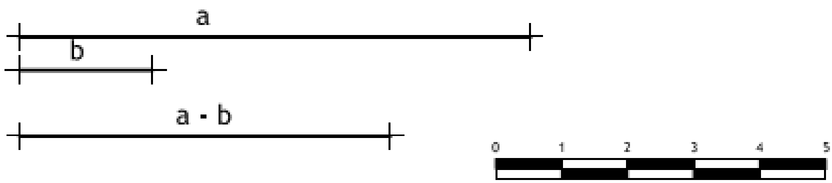


Figura 35. Diferencia gráfica

Multiplicación

Las construcciones gráficas que siguen se justifican en el Teorema de Thales. Permiten resolver operaciones de multiplicación, división y elevar al cuadrado.

Resolver el producto de dos números se puede elaborar de la siguiente forma:

$$a = b \times c$$
$$a \times 1 = b \times c$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{1}$$

Según Thales se puede presentar gráficamente como muestra la figura 36 donde colocamos los segmentos representativos de los operandos a partir del punto común de dos rectas concurrentes.

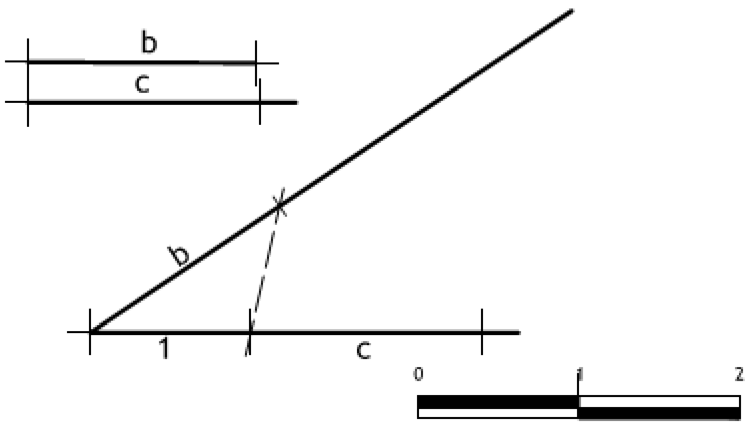


Figura 36. Presentación de la multiplicación gráfica

En figura 37 tenemos el resultado de la multiplicación gráfica.

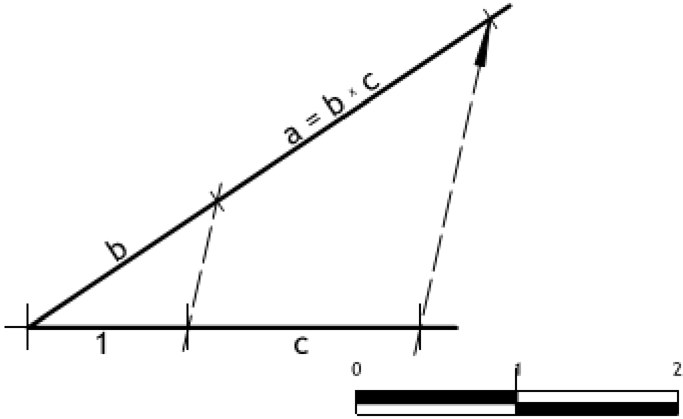


Figura 37. Resultado de la multiplicación gráfica

División

También con el teorema de Thales podemos resolver un cociente.

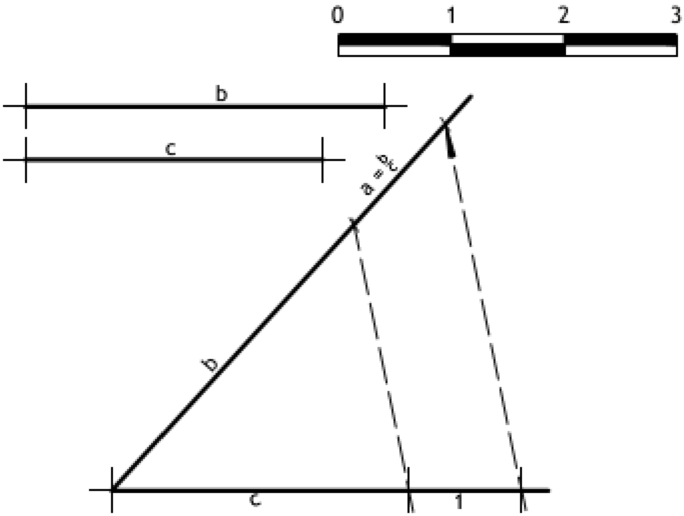


Figura 38. División gráfica

Potenciación

Una potencia se puede tratar en forma similar a una multiplicación. Así en el caso de elevar un número b al cuadrado se resuelve como muestra la figura 39.

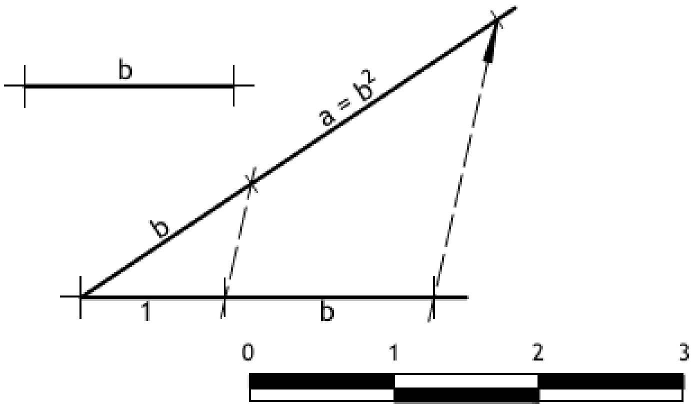


Figura 39. Elevación al cuadrado

Raíz cuadrada

Una raíz cuadrada se puede resolver aplicando el concepto de medio proporcional en una construcción gráfica. Esta última se justifica en el teorema de la altura, el cual establece que en un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa es la media geométrica entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa.

En la ecuación

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{1}$$

a es medio proporcional entre b y 1. Podemos expresar esta última como $b = a^2$ o lo que es lo mismo $a = \sqrt{b}$

Representamos el número b con un segmento MN y a continuación la unidad NP. Trazamos una semicircunferencia de diámetro $b + 1$ con centro en el punto medio de MP. Trazamos una perpendicular a MP por el punto N que corte a la semicircunferencia en Q. El segmento NQ representa la raíz cuadrada del segmento MN. Ver figura 40.

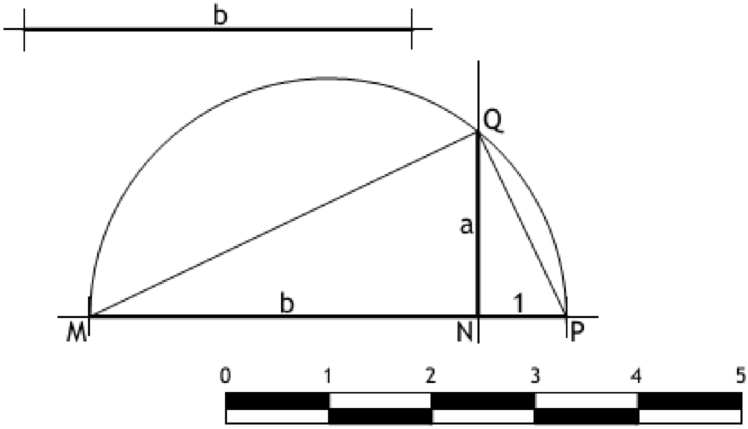


Figura 40. Raíz cuadrada por el medio proporcional

Problemas

Problema 9. El camino del minero

Un minero tiene su casa 6km al norte del río. Debe ir hasta una mina distante, en línea recta, a 15 km de su casa y 3 km al norte del río. No puede viajar en línea recta porque el burro con que se traslada necesita detenerse a beber agua en algún punto del río. ¿Con qué rumbo debe partir en su viaje a la mina para reducir al mínimo la distancia a recorrer?

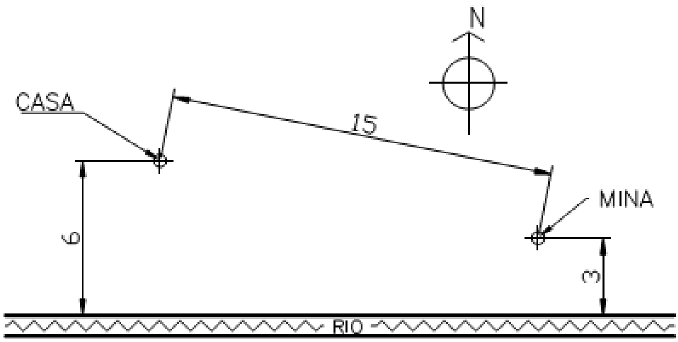


Figura 41. Mapa de la casa del minero y la mina

Pautas para resolver

En términos geométricos podríamos decir que se pide encontrar un punto 'X' sobre la recta 'r' que minimice la suma de distancias a los puntos 'C' y 'M'; siendo 'C' y 'M' la casa y la mina respectivamente.

El paso siguiente sería analizar los diferentes casos que se pueden presentar, a saber:

- Uno de los dos puntos está sobre la recta 'r'. Ese punto es la solución.
- Ambos puntos están sobre la recta 'r'. Infinitas soluciones. Cualquier punto del segmento lo es.
- Los puntos están ubicados en diferentes semiplanos respecto de la recta 'r'. La intersección de la recta 'r' con el segmento C-M, punto X, es la mejor solución ya que los puntos dados quedan unidos por una línea recta.

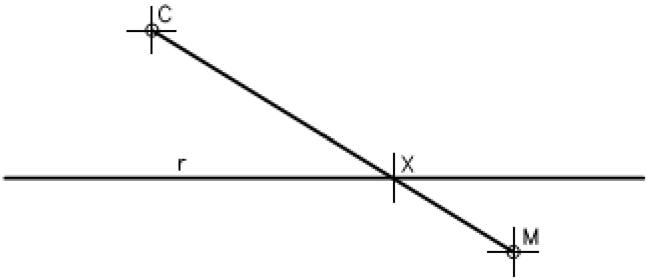


Figura 42. Suma mínima cuando X y R en distintos semiplanos

- Ambos puntos están en el mismo semiplano respecto de la recta 'r'. Es nuestro caso y sugerimos intentar resolverlo viendo la solución del problema más simple ya resuelto.

Resolución

Trazado el simétrico de M respecto de la recta imaginaria que traza el río, tendremos M' que nos lleva al problema ya resuelto en figura 42. Ya que CM = CM', entonces X será el punto buscado ya que cualquier otro alargaría el recorrido.

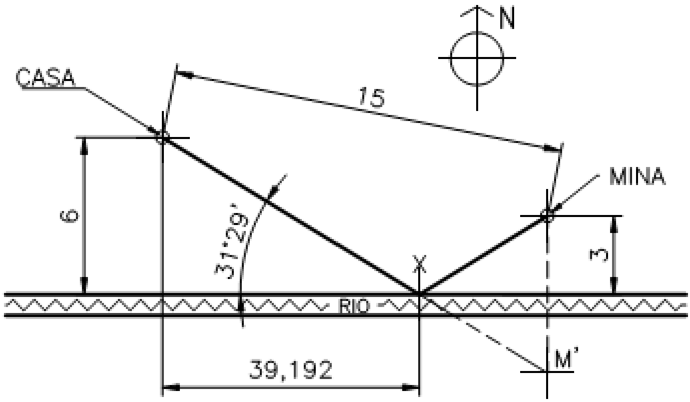


Figura 43. Solución al problema del minero

Problema 10. Cruce de botes

Dos botes inician el cruce de un río desde orillas opuestas, simultáneamente y navegando a velocidades constantes pero diferentes. Se cruzan a 700 metros de una de las orillas y continúan navegando hasta completar el ancho del río, desde donde regresan a la orilla de partida. En el viaje de regreso los botes se cruzan nuevamente, en esta ocasión a 400 metros de la orilla opuesta. Se pregunta: ¿Qué tan ancho es el río?

Pautas para resolver

Estando claro el objetivo, conocer el ancho del río, debemos trazar un plan para alcanzarlo. Para esto conviene preguntarnos cómo podemos relacionar los datos que tenemos con el objetivo. En este caso sería relacionar el recorrido de los botes con el ancho del río. Adicionalmente sería útil realizar un croquis de la situación.

Resolución

Llamemos norte y sur a las orillas del río. Supongamos que el primer cruce se produce a 700 metros de la orilla Norte. En esa instancia entre los dos botes habrán recorrido el ancho del río. Al alcanzar la orilla opuesta, entre los dos botes habrán recorrido dos veces el ancho del río. Y cuando se vuelvan a cruzar, a 400 metros de la orilla sur, entre los dos botes habrán recorrido tres veces el ancho del río. Como los botes avanzan a velocidad constante se deduce que, al producirse este segundo cruce, el bote que partió de la orilla norte habrá recorrido 700×3, es decir, 2100 metros y esto es el ancho del río más 400 metros. Se puede concluir entonces que el ancho del río es de 2100 - 400 metros, es decir 1700 metros.

Verificación

El bote que partió de la orilla sur recorrió al momento del primer cruce 1700 - 700 metros = 1000 metros

Al momento del segundo cruce, entonces, recorrió 3000 metros. Por lo que para completar el regreso a la orilla de partida le deben faltar 1700 * 2 - 3000 = 400 metros. Resultado que coincide con los datos planteados.

Una segunda verificación gráfica nos permite ver un esquema de los desplazamientos de las naves y los puntos de cruce en el tiempo. En el diagrama que sigue se ha trabajado con una escala gráfica apropiada para el tamaño de hoja que permite verificar el resultado obtenido.

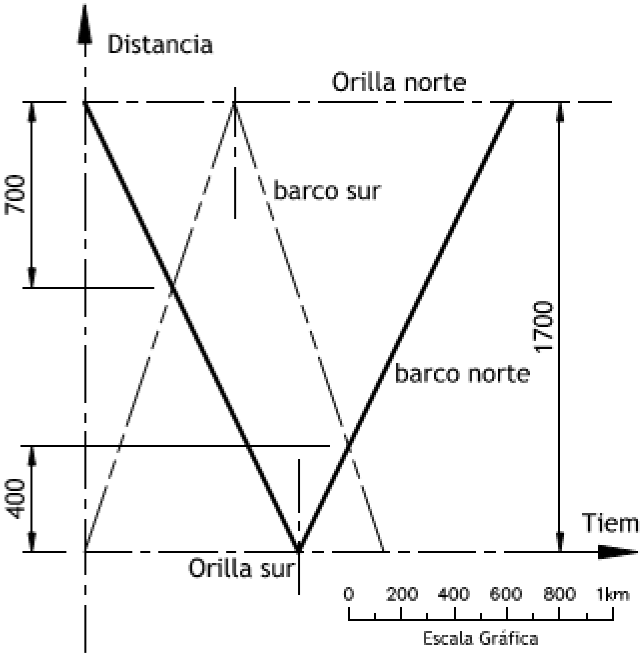


Figura 44. Cruce de botes

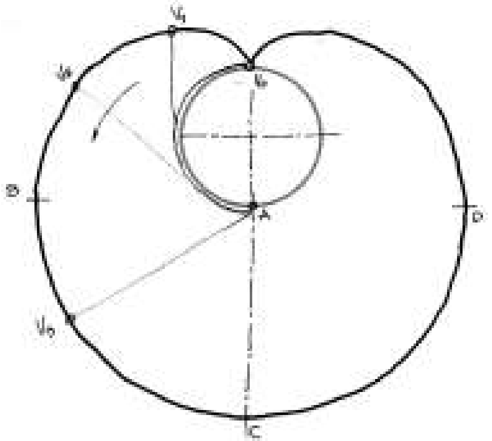
Problema 11. La vaca y el silo

El siguiente ejemplo, tomado de “Cálculo de Una Variable” de James Stewart” muestra una interesante y potente aplicación de cálculo gráfico, en este caso un cálculo de superficie que el libro propone resolver mediante integrales y nosotros vamos a resolver gráficamente.

El problema dice así: En un punto de la periferia de un silo de 10 m de diámetro está atada una cuerda de longitud igual al semiperímetro del silo. En el otro extremo de la cuerda está atada una vaca. Se pide calcular el área de pastura a la que puede acceder la vaca.

Pautas para resolver

Al desenrollar la soga, el extremo donde está el animal describe una curva compuesta como la graficada en el croquis.



Siendo el silo la circunferencia y la soga es la línea atada al punto A, entonces la vaca se puede desplazar por la curva V_0, V_1, V_2, B, V_3, C, D y llegando a V_0 al completar la vuelta.

Desde V_0 hasta B la curva es una evolvente de círculo, B-C-D es un arco de circunferencia y desde D hasta V_0 se tiene una evolvente simétrica de la primera. El paso siguiente será desarrollar una estrategia para calcular el área donde podrá pastar la vaquita.

Resolución

Este problema se resuelve fácilmente aprovechando las utilidades del software CAD. Comenzamos trazando la circunferencia representativa del silo con centro en O y diámetro AV. A continuación el arco de evolvente que describe el extremo de la soga desde V a B.

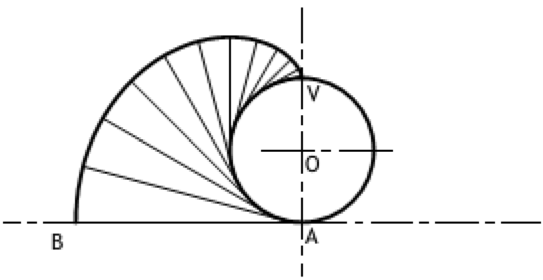


Figura 45. Evolvente de círculo por extremo de la soga

Luego la semicircunferencia BCD y finalmente la evolvente de circunferencia que va desde D hasta V_0.

Creamos una región con el área encerrada entre el silo y la curva descripta por la soga, es decir, el área donde come la vaca. Consultando el software obtenemos que el área alcanzada por la vaca que es 645.9658 m^2.

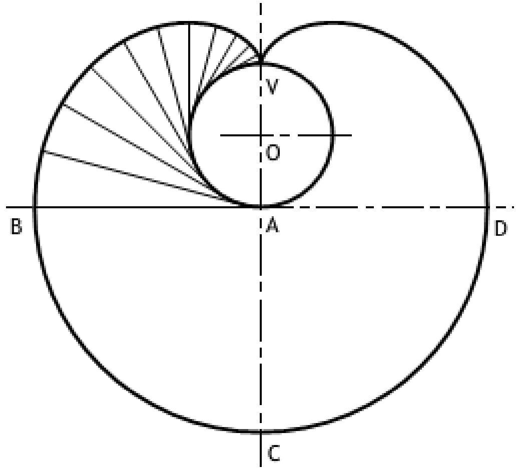
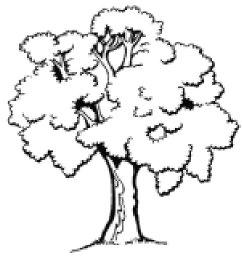


Figura 46. Recorrido de la soga

Problema 12. Geometría y forestación

Disponemos de ocho retoños para plantar en un terreno cuadrado.



Podemos hacerlo colocando los árboles, tanto en los bordes como en el interior del cuadrado tal como se muestra en la figura 47. Sin embargo esto no es lo mejor ya que cuando crezcan su copas van a chocar y quitarse el sol mutuamente. El ideal es que los árboles queden tan separados como sea posible.

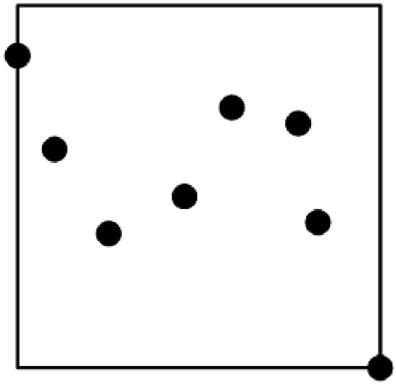


Figura 47. Una forma posible de disponer los árboles

Y ahora el desafío: encontrar una mejor solución donde los árboles estén separados por la mayor distancia posible.

Pautas para resolver

Un problema similar a este pero más fácil de resolver sería el caso de tener que ubicar dos árboles. Los colocaríamos en vértices opuestos del cuadrado. No hace falta demostrar nada; hemos logrado la mayor separación posible.

También sería muy simple de resolver el caso de cuatro árboles ubicándolos en los vértices.

El caso de tres árboles se resuelve fácilmente observando los resultados del Problema 5.

Son bastante evidentes las soluciones para los casos de cinco y nueve árboles; esta última va en la figura 48.

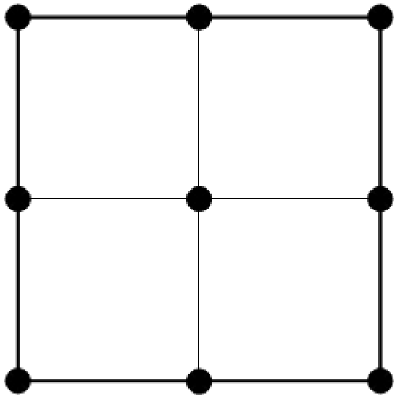


Figura 48. Nueve árboles con la máxima separación posible

Desde este caso es bastante sencillo pasar al de ocho que es nuestro problema.

Solución

Desde un plano con nueve árboles podemos observar que quitando el central y a medida que se desplazan hacia el centro los señaladores que están en los puntos medios de los lados por una parte aumenta la separación entre estos y los que están en los vértices y por otra parte disminuye la distancia existente entre los señaladores que movemos. Habremos alcanzado la solución óptima cuando la distancia entre los árboles que se desplazan sea igual a la distancia entre ellos y los dos vértices más cercanos; esto que el árbol ubicado en el vértice del cuadrado forme un triángulo equilátero con los dos árboles más cercanos.

La próxima figura muestra la solución alcanzada.

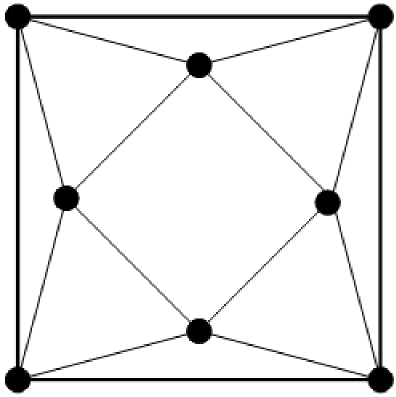


Figura 49. Ocho árboles con la mayor separación posible.

Problema 13. Prestidigitación geométrica. 80 = 81?

Veamos ahora un problema propio de un gran ilusionista. Lo voy a guiar para que usted pueda realizar un pase casi mágico. Es muy simple; solo debe seguir las instrucciones que siguen.

Partimos de un cuadrado de 9 unidades de lado, 81 unidades cuadradas de superficie. A fin de comprobar el proceso puede recortar la figura sobre una cartulina o cartón. Si quiere tener máxima exactitud adopte una unidad de medida grande; tan grande como para que 9 x 9 unidades quepan en su cartulina.

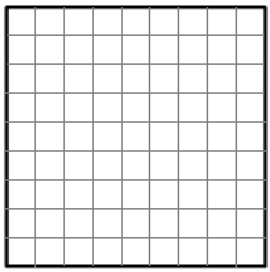


Figura 50. Cuadrado de 9 x 9 unidades

Haremos un corte que vaya desde un punto ubicado sobre un lado y a una unidad de distancia de un vértice hacia el vértice opuesto como se muestra en la figura 51.

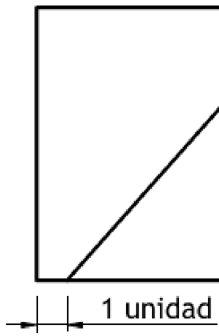


Figura 51. Cuadrado de 9 x 9 unidades con el corte

Seguidamente desplazamos la pieza superior izquierda manteniendo contacto con la otra pieza hasta que el desplazamiento vertical haya sido exactamente una unidad. Se alcanza una situación similar a la del lado izquierdo de la figura 52. Sobresaldrá una partecita del cuadrado original que cortaremos para luego llevarla al lugar faltante abajo y a la izquierda; tendremos finalmente una disposición de partes como la presentada a la derecha de la misma figura.

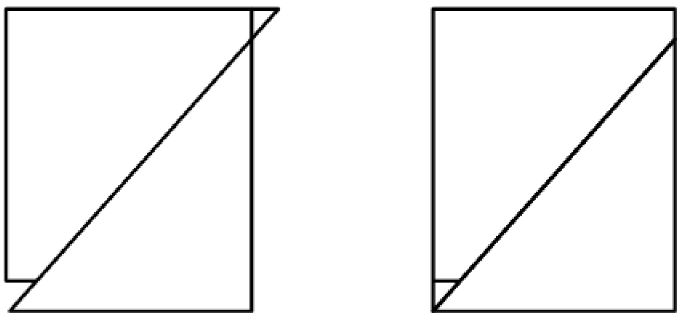


Figura 52. Desplazamiento y reacomodación de las partes

Si ahora revisa y mide se encontrará con un rectángulo de 8 x 10 unidades, esto es 80 unidades cuadradas de superficie.

¿Qué ha sucedido? ¿Donde está la unidad que falta? ¿Puede encontrar una explicación?

Pautas para resolver

La magia no existe. El Mago Merlín y Harry Potter tienen sus poderes limitados a la ficción. En el mundo real debemos hablar de ilusiones y trucos. Copperfield ilusiona aprovechándose de sus facultades histriónicas para distraer y engañar el cerebro de los espectadores.

Ahora usted observe y mida cuidadosamente la figura resultante. Debe haber alguna falla.

Explicación

Dimos por sentado que al mover las piezas a lo largo del corte los desplazamientos vertical y horizontal serían iguales. Pero esta suposición solo es válida para un corte a 45°.

Si ha sido prolijo en los cortes notará que la parte móvil del cuadrado se ha desplazado una unidad hacia arriba y menos de una unidad hacia la derecha.

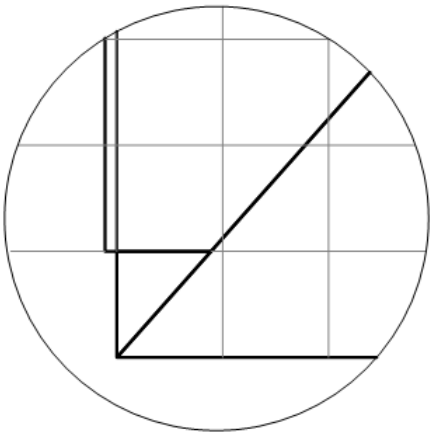


Figura 53. Detalle del vértice inferior de la figura compuesta.

El lado izquierdo de la pieza superior no queda alineado con del vértice inferior izquierdo de la pieza inferior. Sobresale 0,1111 unidades. Multiplicando este valor por las nueve unidades de altura se tiene la unidad cuadrada faltante.

Problema 14. Triángulo inscripto de área máxima

Propongo ahora un problema cuyas conclusiones aprovecharemos más adelante. Se quiere saber cuál es el triángulo de mayor área inscripto en una circunferencia. ¿Será un triángulo acutángulo, obtusángulo? ¿Tal vez debiera ser isósceles?

Pautas para resolver

Comience trazando una circunferencia y sobre ella imagine cual puede ser el triángulo de área máxima. Trace una secante cualquiera A-C que intente ser uno de los lados de ese triángulo. Busque el triángulo de mayor área que tenga a ese triángulo como lado. Para facilitar la visualización es conveniente que la secante sea horizontal.

Comparemos ahora las áreas de los triángulos que se obtienen tomando como tercer vértice del triángulo un punto cualquiera B y tomando el punto P, más distante del lado AC.

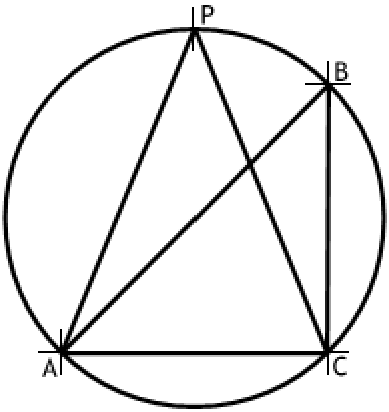


Figura 54. Comparación de triángulos inscriptos en circunferencia

Evidentemente, eligiendo P tenemos un triángulo que resulta ser isósceles y es de mayor altura. Le sugiero que ahora intente seguir por sí mismo el proceso de optimización.

Resolución

La imagen deja en claro que, dado un lado AB del triángulo inscripto, siendo el triángulo isósceles ABP el de mayor altura, será el de mayor área de todos aquellos con un lado igual a AC. Se infiere entonces que mientras existan dos lados desiguales en un triángulo siempre será posible construir otro de área mayor. Se concluye entonces que el triángulo que no tenga lados desiguales será el de mayor área posible, es decir, el equilátero.

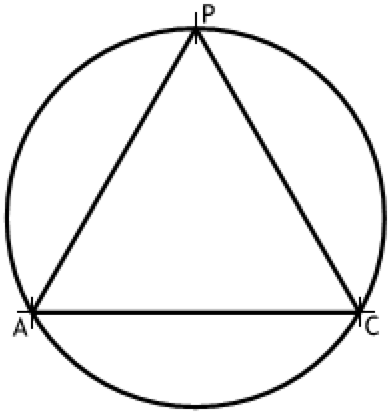


Figura 55. Triángulo equilátero inscripto, de área máxima

Problema 15. Triángulo circunscripto de área mínima

Del mismo tipo que el problema anterior pero esta vez se quiere saber ¿Cuál es el triángulo de menor área circunscripto a una circunferencia?

Pautas para resolver

Veamos la figura 56. Desde un punto ‘A’, externo a una circunferencia tracemos dos tangentes para obtener un triángulo como el A-B-C trazando la tangente por el punto ‘T’.

Sigamos un razonamiento indirecto semejante al anterior.

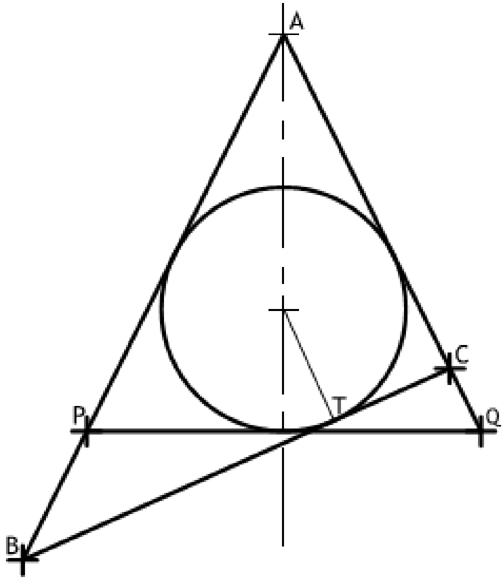


Figura 56. Triángulo circunscripto de área mínima

El triángulo circunscripto ABC con el punto de tangencia T variable para el lado BC tiene área mínima cuando es isósceles. En efecto, si los lados AB y AC son desiguales, será posible encontrar un triángulo isósceles APQ de menor área. Y esto sucederá siempre que haya dos lados desiguales. Así pues, se concluye que el triángulo equilátero circunscripto es el de menor área.

Disecciones planas

Trataremos un grupo de problemas que consisten en disecar una figura plana de acuerdo con algún criterio.

Problema 16. La solución está en la pregunta

Dividir la figura en dos partes iguales. La línea de división sigue el cuadriculado. Las figuras resultantes pueden estar desplazadas, giradas y/o rebatidas una de otra.

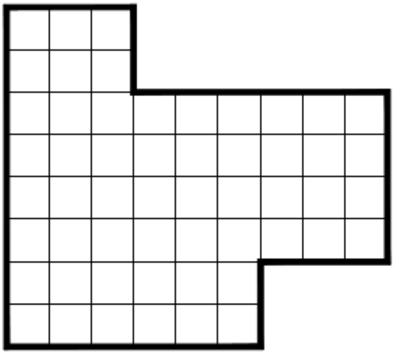


Figura 57. Disección: la solución está en la pregunta

Pautas para resolver

Esta clase de problemas requieren de una buena cuota de observación e imaginación. No podemos establecer un camino algorítmico. Tendremos que buscar la solución mediante prueba y error. Siendo así resulta recomendable establecer algunos criterios orientativos de la búsqueda.

Comencemos por las observaciones. La disección debe seguir, en parte al menos, algunas de las líneas externas de la figura; ya sean iguales o simétricas.

La mayor de las medidas de la figura suministrada podría ser el ancho solo en caso de la figura dada tenga alguna clase de simetría. No siendo así tendremos que pensar en la existencia de rotaciones o simetrías.

Solución

Efectivamente, la solución es un signo de pregunta y su simétrico ubicados adecuadamente como se muestra en figura 58.

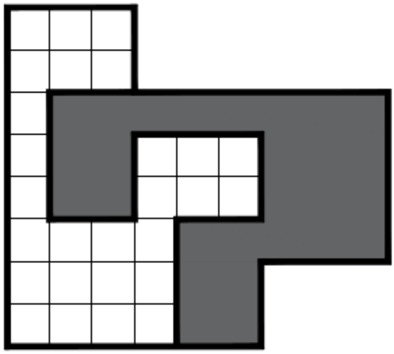


Figura 58. ¡La solución está en la pregunta!

Problema 17. El campo familiar

Un campesino quiere repartir un campo que posee entre sus cuatro hijos. Como estos se celan mutuamente y no admiten diferencias el hombre debe ser muy cuidadoso al hacer el reparto. Por eso es que decide dividir el campo en cuatro partes absolutamente congruentes. Siendo el terreno de la forma mostrada en el plano que sigue debemos sugerirle al hombre como hacer la división.

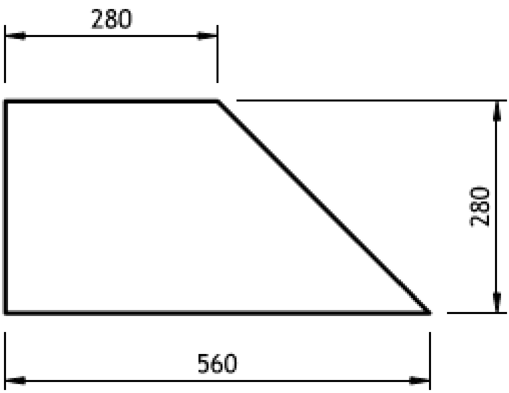


Figura 59. El campo familiar

Pautas para resolver

En este caso siguen siendo válidas las mismas pautas del problema anterior, solo que ahora hay que dividir en cuatro. Hay que observar también la particular relación entre las dimensiones del campo.

Resolución

El ángulo en la parte inferior derecha es una buena ayuda para comenzar el tanteo de formas posibles. El campo familiar ya dividido se muestra en figura 60.

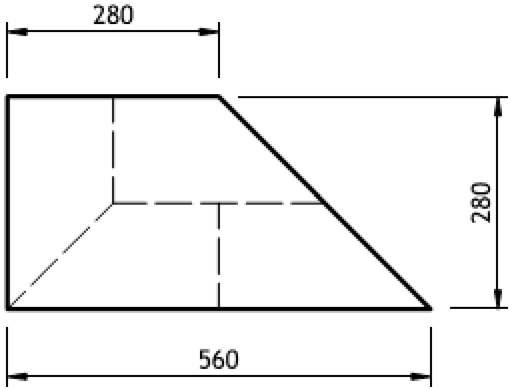


Figura 60. El campo familiar dividido

Problema 18. En el taller de herrería

En cierta oportunidad solicitó asesoramiento un herrero que dispone de una chapa perfectamente cuadrada de 1 m de lado con la cual debe componer diez cuadrados iguales utilizando la chapa en su totalidad. A fin de reducir el tiempo de ejecución habrá de realizar la menor cantidad de cortes rectos posibles para luego soldarlos dándole la forma requerida a las piezas. ¿Qué instrucciones debemos darle?

Pautas para resolver

Es inmediato deducir que los cuadrados resultantes serán de 0,1 m^2 de superficie. El problema es que el lado de los mismos va a ser un número irracional y por lo tanto debemos ser muy cuidadosos al disponer la forma de cortar la chapa.

Para simplificar las cuentas vamos a expresar todas las medidas en dm. Así el cuadrado original tendrá 10 dm de lado y su superficie es de 100 dm^2.

Sería muy simple el problema si tuviésemos que dividir en nueve partes iguales. El lado de los cuadrados resultantes medirá $10/3$ de dm y se podrá disponer como sigue.

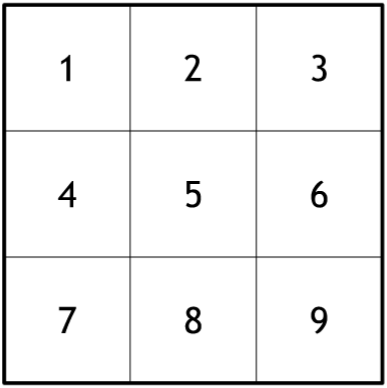


Figura 61. La chapa cuadrada dividida en nueve partes iguales

Pero nuestro caso es diferente. El lado del cuadrado buscado será $l = \sqrt[2]{10}$, o sea algo menor que 1/3. La pregunta que se impone ahora es ¿habrá alguna forma de trazar la chapa para conseguir el lado exacto?

Resolución

Siempre se puede conseguir la representación de un número natural sumando cuadrados; en nuestro caso sería $10 = 1^2 + 3^2$. O sea que si construyo un triángulo rectángulo con catetos iguales a 1 y 3, el teorema de Pitágoras me dice que la hipotenusa va a tener la longitud pretendida: $\sqrt{10}$.

En el trazado de figura 62 puede verse el corte propuesto por líneas de trazos con los que se divide la figura inicial en cuadrados o partes de ellos. Vamos a verificar que el lado de esos cuadrados tenga la longitud requerida.

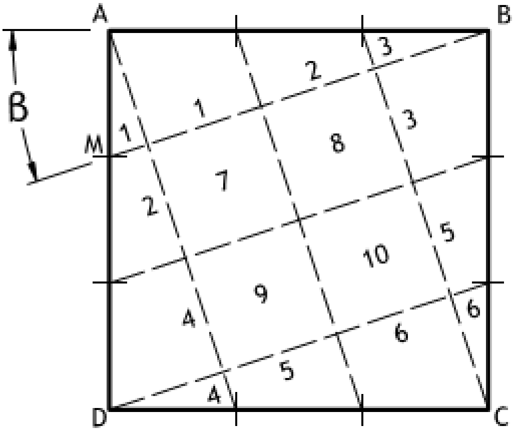


Figura 62. División del cuadrado para componer diez cuadrados iguales

El triángulo rectángulo M-A-B de catetos 10 y 10/3 la hipotenusa BM mide

$$h = \sqrt{10^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{10}{3} \times \sqrt{10}$$

La relación entre el cateto mayor y la hipotenusa, seno del ángulo comprendido, es

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{3}{10} \times \sqrt{10}$$

Entonces el lado de un cuadrado chico, como por ejemplo el 8, medirá

$$l = \frac{10}{3} \times \operatorname{sen} \beta = \frac{10}{3} \times \frac{3}{10} \times \sqrt{10} = \sqrt{10}$$

O sea que los cuadrados que podemos formar cumplen las condiciones. Solo nos queda cortar por las líneas de trazos y con las piezas que no son cuadrados completos, considerar las que tienen el mismo número y unirlas.